This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

06: 4528 v.20

LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SANTA CRUZ

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

21754

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

TWINTIGSTE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1884.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

TWINTIGSTE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

Advies over een antwoord aan Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken betrekkelijk de in October 1883 te Rome gehouden geodetische conferentie; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884. . . . . blz. 63.

Rapport over den door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN uit naam van Dr. N. M. KAM te Schiedam aan de Afd. Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen ter uitgave aangeboden „Catalog von Sternen, deren Oerter durch selbständige Meridianbeobachtungen bestimmt worden sind, aus Band 1 bis 66 der astronomischen Nachrichten reducirt auf 1855"; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884. . . . . „ 66.

Verslag over eene verhandeling van den Heer J. W. GILTAY: „Over het polariseeren van telefonische geleiders"; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884. . . . blz. 71.

Rapport over eene verhandeling van Dr. B. HAGEN, getiteld: „Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen"; uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884. . . . . „ 233.

Verslag omtrent eene verhandeling van Dr. G. J. MICHAËLIS, getiteld: „Over de theorie der veerkrachtige nawerking"; uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884. . . „ 297.

Verslag over eene verhandeling van Dr. F. DE BOER; getiteld: „Discussie der algemeene vierde-machtsvergelijking"; uitgebracht in de Vergadering van 25 April 1884. . . . „ 410.

MEDEDEELINGEN.

C. A. J. A. OUDEMANS. Revisio Pyrenomycetum in Regno Batavorum hucusque detectorum. . . . . „ 1.

J. W. GILTAY. Het polariseeren van telefonische ontvangers. (Met één plaat) . . . . . „ 78

D. BIERENS DE HAAN. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. . . . . „ 102, 197.

Dr. B. HAGEN. Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen. . . . . blz. 236.

D. J. KORTEWEG. Over de banen beschreven onder den invloed eener centrale kracht. . . . . „ 247.

J. A. C. OUDEMANS. Over het vermogen van den 10-voets kijker van HUYGENS. (Met één plaat). . . . . „ 290.

G. J. MICHAËLIS. Over de theorie der veerkrachtige nawerking. . . . . „ 300.

E. MULDER. Bijdrage tot de kennis van normaal cyaanzuur en afgeleiden. Vijfde gedeelte. . . . . „ 375.

Dr. F. DE BOER. Discussie der algemeene vierde-machtsvergelijking. (Met twee platen). . . . . „ 413.

REVISIO PYRENOMYCETUM

IN REGNO BATAVORUM HUCUSQUE DETECTORUM

AUCTORE

C. A. J. A. OUDEMANS.

114/85 Aug. 11.

ENUMERATIO LIBRORUM

QUI IN DIGERENDIS HISCE PAGINIS PRAESTO FUERUNT, SIMUL ABBREVIATIONUM INTERPRETATIO.

Librorum titulis jam prius *) memoratis addantur sequentes:

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Eerste Serie, V. — Amsterdam, 1860.

C. A. J. A. Oudemans, Matériaux pour la Flore mycologique de la Néerlande, I et II; in Archives Néerlandaises II (1867) et VIII, 1873. — Harlem.

C. A. J. A. Oudemans, Over den aard en de beteekenis van het Pyrenomyceten-geslacht Ascospora, in Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wet. 2, X, 76. — Amsterdam, 1876. — Gallice: Sur la nature et la valeur du genre Ascospora, de la famille des Pyrénomycètes, in Archives Néerlandaises, XI, 341. — Harlem, 1876.

C. A. J. A. Oudemans, Bijdrage tot de Flora mycologica van Nederland, IX; in Versl. en Med. der Kon. Akad. van Wet., Afd. Natuurkunde, 2, XVIII, 360. — Amsterdam, 1883.

C. A. J. A. Oudemans, Herbarium van Nederlandsche planten. Semicenturiae 27. — Amsterdam, a° 1867—1877.

---

*) *Versl. en Meded. der Kon. Akad. v. Wet.,* Afd. Natuurk., 2, XIX, 349 et 350.

C. A. J. A. Oudemans, Fungi Neerlandici exsiccati, Centuriae I—III. — Amsterdam, 1875—1879.

Madem. A. Libert, Plantae cryptogamicae quas in Arduenna collegit. Centuriae I—IV. — Leodii, 1830—1834.

E. Lambotte, Flore mycologique Belge. — Verviers, 1880.

A. P. de Candolle, in Mémoires du Muséum, III. — Paris.

Annales des Sciences naturelles. 6e Série, IX. — Paris, 1883.

M. Bulliard, Histoire des Champignons de la France, I. — Paris, 1791.

F. F. Chevalier, Flore générale des environs de Paris, I. — Paris, 1826.

L. R. et **C. Tulasne,** Selecta Fungorum Carpologia, II. — Parisiis, 1863.

P. H. Karsten, Symbolae ad Mycologiam Fennicam. — Helsingfors, 1873—1879.

E. Fries, Systema Mycologicum, II et III. — Gryphiswaldiae, 1823 et 1832.

C. E. Hansen, Fungi fimicoli danici, et ejusdem Résumé. — Copenhague, 1877.

Grevillea. A monthly record of cryptogamic Botany, I—XII. — London, 1872—1884.

R. K. Greville, Flora Edinensis. — Edinburgh, 1824.

R. K. Greville, Scottish cryptogamic Flora, I—VI. — Edinburgh, 1823—1828.

C. B. Plowright, Sphaeriacei Britannici, Centuriae I—III. — King's Lynn, 1873—1878.

H. J. Tode, Fungi Mecklenburgenses selecti, I—II. — Luneburgi, 1790—1791.

C. H. Persoon, Synopsis methodica Fungorum. — Göttingae, 1801.

C. G. Ehrenberg, Sylvae mycologicae Berolinenses. — Berolini, 1818.

H. F. Link, Handbuch zur Erkennung der nutzbarsten und am häufigsten vorkommenden Gewächse, III. — Berlin, 1833.

F. G. Wallroth, Flora cryptogamica Germaniae. — Norimbergiae, 1833.

A. de Bary, Morphologie und Physiologie der Pilze, etc. — Leipzig, 1866.

J. Nitschke, Pyrenomycetes Germanici. — Breslau, 1870.

G. von Niessl, Neue Kernpilze, in Oest. bot. Zeits. — Wien, 1874.

L. Fuckel, Symbolae Mycologicae, Nachträge I—III. — Wiesbaden, 1871—1875.

G. Winter, Die Deutschen Sordarien. — Halle, 1873.

L. Rabenhorst, Mycologia Europaea. Opus absque titulo et impressionis anno. Pyrenomycetes plurimi ibidem propositi et descripti ab Auerswald.

Hedwigia, ein Notizblatt für kryptogamische Studien, I—XXII. — Dresden, 1852—1884.

Klotzsch, Herbarium Mycologicum, editio secunda, edita a L. Rabenhorst. Centuriae I—VIII. — Dresdae, 1850—1860.

L. Rabenhorst, Fungi Europaei. Centuriae I—XXX. — Dresdae, 1859—1884.

Duby, Mémoire sur la tribu des Hystérinées. — Genève, 1861.

G. de Notaris, Micromycetes Italici novi vel minus cogniti. Decades I—IX. — Taurini, 1839—1855.

V. Cesati et **G. de Notaris,** Schema di classificazione degli Sferiacei italici aschigeri (e Comm. Soc. crittog. Ital. I, p. 177—238).

G. de Notaris, Sferiacei italici. Centuria I (unica). — Genovae, 1863.

G. de Notaris, Prime linee di una dispozione de Pirenomiceti Isterini in Giorn. bot. Ital. II. — Firenze, 1847.

P. A. Saccardo, Mycologiae Venetae Specimen. — Pataviae, 1873.

P. A. Saccardo, Fungi Veneti novi vel critici. Series I—V, a° 1873—1876. — I, II et V in Nuovo Giornale Botanico Italiano, Series 1,

V; Series 2, VII et Series 2, VIII; III in Hedwigia 1875; IV in Atti della Società Veneto-Trentiana di Scienze Naturali in Padova IV luce prodierunt.

P. A. Saccardo, Conspectus generum Pyrenomycetorum italicorum systemate carpologico dispositorum. — Padova, 1875.

P. A. Saccardo, Fungi Italici autographe delineati. Tabulae 1—1280. — Padova, 1877—1884.

C. Spegazini, Nova addenda ad Mycologiam Venetam. I—II. — Patavii 1875 et Mediolani 1880.

REVISIO.

Fam. I. PERISPORIACEAE Fr. (cf. Versl. en Med. Kon. Ak. v. Wet., Afd. Natuurk., 2e Serie, XIX, p. 351—363). Monendum tamen Microsphaeriam Eryngii aestate praeterita detectam esse in foliis Evonymi europaei.

Fam. II. SPHAERIACEAE Fr.

Sect. 1. Allantosporae Sacc.

COELOSPHAERIA Sacc.

1. **Coelosphaeria cupularis** (P.) Karsten Symb. ad Mycol. Fenn. 42; Sacc. Syll. I, 91. — Sphaeria cupularis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3051; Nitschkia Fuckelii in Oud. Herb. v. Nederl. Pl. n⁰. 761.
   In ramis ulmeis. — Amsterdam. — Goes.
2. **Coelosphaeria tristis** (P.) Sacc. Syll. I, 92. — Sphaeria cupularis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3051, quoad exempla in ramis sambucinis collecta; ibid n⁰. 3074.
   In ramis sambucinis et in ligno acerino putrescente. — Leiden. — Utrecht.

CALOSPHAERIA Tul.

1. **Calosphaeria Princeps** Tul. S. F. C. II, 109; Sacc. Syll. I, 95. — Sphaeria pulchella in Prodr. Fl. Bat n⁰. 3040.
   In cortice Prunorum. — Maastricht.

QUATERNARIA Tul.

1. **Quaternaria Persoonii** Tul. S. F. C. II, 105; Sacc. Syll. I, 106. — Sphaeria quaternata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3042.
   In ramis betulinis et fagineis. — Walcheren.
2. **Quaternaria dissepta** (Fr.) Tul. S. F. C. II, 107; Sacc. Syll. I, 107. — Valsa dissepta in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183 et III, 159; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In ramis ulmeis. — Amsterdam. — Naaldwijk.

VALSA Fr.

1. **Valsa ceratophora** Tul. S. F. C. II, 191; Sacc. Syll. I, 108. — Sphaeria ceratosperma in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3018.
   In ramis querneis. — Baarn. — Harderwijk. — Goes. — Maastricht.
2. **Valsa Rubi** Fuck. Symb. 200; Sacc. Syll. I, 109. — Diatrype ceratosperma in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.
   In ramis Ruborum. — Grebbe. — Lochem.
3.? **Valsa coronata** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 110. — Sphaeria coronata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3035.
   In cortice fagineo. — Utrecht.
4. **Valsa decorticans** Fr. S. V. S. 412; Nitschke Pyren. Germ. 194; Sacc. Syll. I, 123. — Sphaeria decorticans in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3036.
   In ramis fagineis et Sorbi Aucupariae. — Maastricht.
5. **Valsa ambiens** (P.) Fr. S. V. S. 412; Sacc. Symb. I, 131. — Valsa deplanata Ned. Kr. Arch. 1, V, 345; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In ramis Pyri Mali et Crataegi monogynae. — Bloemendaal. — Naaldwijk. — Lochem.
6. **Valsa salicina** (P.) Fr. S. V. S. 412; Nitschke Pyren. Germ. 212; Sacc. Syll. I, 131. — Sphaeria salicina in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3038.
   In ramis salicinis emortuis. — Rotterdam, Leiden. — Goes.

7. **Valsa nivea** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 411; Nitschke Pyren. Germ. 224; Sacc. Syll. I, 137. — Sphaeria nivea Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3032.
In ramis populneis et salicinis. — Amsterdam. — Naaldwijk.

EUTYPELLA Nke.

1. **Eutypella Prunastri** (P.) Sacc. Syll. I, 147. — Sphaeria Prunastri in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3025.
In ramis pruneis. — Utrecht.
2. **Eutypella stellulata** (Fr.) Sacc. Syll. I, 149. — Sphaeria stellulata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3026.
In ramis alneis. — Amsterdam, Sloterdijk.

EUTYPA Tul.

1. **Eutypa Acharii** Tul. S. F. C. II, 53; Sacc. Syll. I, 162. — Sphaeria eutypa in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3095.
In ramis crassioribus Aceris Pseudoplatani. — Amsterdam (sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 169).
2. **Eutypa lata** (P.) Tul. S. F. C. II, 56; Sacc. Syll. I, 170. — Valsa lata Nitschke Pyren. Germ. 141. — Sphaeria lata in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat n⁰. 3021; Sphaeria undulata Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3008.
In cortice et ligno fraxineis et in ramis Crataegi et Coryli. — Amsterdam. — Leiden, Naaldwijk. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.
3. **Eutypa scabrosa** (Bull.) Fuck. Symb. 215; Sacc. Syll. I, 171. — Sphaeria scabrosa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3014.
In ramis et truncis querneis. — Maastricht.
4. **Eutypa flavo-virescens** (Hoffm.) Tul. S. F. C. II, 57; Sacc. Syll. I, 172. — Sphaeria flavovirens in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3013; Diatrype flavovirens in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.
In ramis. — Naaldwijk. — Utrecht. — Lochem.

5. **Eutypa Fraxini** Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, III, 156 (a⁰ 1878); Sacc. Syll. I, 174 (a⁰ 1882).
In ramis fraxineis. — Amsterdam.

6. **Eutypa velutina** (Wallr.) Sacc. Fgi Ven. Ser. IV, 16; Syll. I, 176. — Sphaeria velutina in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3022.
In ramis et ligno dejectis. — Leiden. — Goes.

CRYPTOSPHAERIA Grev.

1. **Cryptosphaeria populina** (P.) Sacc. Syll. I, 183. — Sphaeria corticis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3097.
In cortice populino vetusto. — Maastricht.

DIATRYPE Fr.

1. **Diatrype disciformis** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 385; Nitschke Pyren. Germ, 67; Sacc. Syll. I, 191. — Sphaeria disciformis Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3011.
In ramis quercinis, fraxineis et aesculinis. — Amsterdam. — Leiden. — Maastricht.

2. **Diatrype bullata** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 385; Sacc. Syll. I, 192. — Sphaeria bullata Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3007; Diatrype bullata in Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.
In ramis salicinis, alneis, coryleis. — Amsterdam. — Naaldwijk. — Lochem. — Kampen, Zalk. — Groningen. — Maastricht.

3. **Diatrype Stigma** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 385; Nitschke Pyren. Germ. 65; Sacc. Syll. I, 193. — Sphaeria Stigma in Tijds. Nat. Ges. XI, 393 et Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3009; Sphaeria decorticata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3010.
In ramis fagineis et Prunorum. — Amsterdam, Haarlem. — Rotterdam, Leiden. — Utrecht. — Maastricht.

DIATRYPELLA.

1. **Diatrypella verruciformis** (Ehrb.) Nitschke Pyren. Germ.

76; Sacc. Syll. I, 200. — Sphaeria verruciformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3012; Diatrype verruciformis in Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

In ramis querneis, carpineis, ulmeis. — Amsterdam, Bloemendaal. — Utrecht. — Maastricht.

2. **Diatrypella quercina** (P.) Nitschke Pyren. Germ. 71; Sacc. Syll. I, 206. – Sphaeria quercina in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3015.

In ramis querneis. — Haarlem. — den Haag, Leiden. — Utrecht. — Maastricht.

3. **Diatrypella melaena** Nitschke Pyren. Germ. 78; Sacc. Syll. I, 209.

In ramis Tiliae europaeae. — Amsterdam.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

CERATOSTOMA FR.

1. **Ceratostoma piliferum** (Fr.) Fuck. Symb. 128; Sacc. Syll. I, 219. — Sphaeria dryina in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 406. — Ceratostoma piliferum in Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.

In cortice vetusto Pini Strobi. — Eerbeek.

CHAETOMIUM KZE.

1. **Chaetomium comatum** (Tode) Fr. S. M. III, 253; Sacc. Syll. I, 221. — Chaetomium elatum Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaet.) 83; Tijds. Nat. Gesch. XII, 273; Prodr. Fl. Bat n⁰. 2984.

In graminum residuis putrescentibus. — Leiden, Naaldwijk. — Goes.

2. **Chaetomium chartarum** Ehrenb. Sylv. myc. berol. 27; Sacc. Syll. I, 223. — Chaetomium Kunzeanum Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaet.) 13 et 82.

In charta liquore stercoroso per longius tempus madefacto.

3. **Chaetomium spirale** Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaetomium) 70 et 79; Sacc. Syll. I, 224. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 378.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
4. **Chaetomium bostrychodes** Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaetomium) 66 et 81; Sacc. Syll. I, 224. — Versl. en Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 378.
In fimo cuniculorum. — Overveen.

SORDARIA Ces. et de Not.

1. **Sordaria coprophila** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 226; de Not. Sfer. ital. t. XX; Winter Sord. 26; Sacc. Syll. I, 230. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.
In stercore vaccino. — Rijzenburger bosch.
2. **Sordaria minuta** Fuck. Symb. App. II, 44; Wint. Sord. 36; Sacc. Syll. I, 231. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.
In fimo cuniculorum. — Haarlem.
3. **Sordaria fimiseda** Ces. et de Not. Schema Sfer. 226; Wint. Sord. 25; Sacc. Syll. I, 232. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2. XVIII, 384.
In fimo cuniculorum. — Brielle.
4. **Sordaria curvula** de Bary, Morph. d. Pilze 209; Wint. Sord. 37; Sarc. Syll. I, 233. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384.
In fimo herbivororum variorum.
var. coronata Wint. Sord. 38; Sacc. Syll. I, 234.
In fimo vaccino. — Amsterdam.
5. **Sordaria decipiens** Wint. Sord. 28; Sacc. Syll. I, 235. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet 2, XVIII, 384.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
6. **Sordaria lanuginosa** (Pr.) Sacc. Fgi Ven Ser. VI, 26: Syll. I, 237. — Sphaeria Brassicae in Ned. Kr. Arch. 2, I, 264; Arch. Néerl. VIII, 405.
In caulibus putrescentibus Brassicae. — Naaldwijk.

7. **Sordaria anserina** Wint. Sord. 35; Sacc. Syll. I, 238. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384.
In fimo cuniculorum. — Overveen.

HYPOCOPRA.

1. **Hypocopra fimicola** (Rob.) Sacc. Syll. I, 240. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384.
In fimo equino et caprearum. — Amsterdam.
2. **Hypocopra Winterii** Oud. in Hedwigia 1882, p. 160; Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, X. — Sordaria Winterii Oud. in Hedwigia 1882, p. 123.
In fimo Cameli Bactriani. — Amsterdam.
3. **Hypocopra discospora** Fuck. Symb. App. II, 43; Sacc. Syll. I, 240. — Versl. Med. Kon. Akad. v. Wet. Afd. Nat. 2. XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Haarlem.
4. **Hypocopra platyspora** (Plowr.) Sacc. Syll, I, 241. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
5. **Hypocopra microspora** (Plowr.) Sacc. Syll. I, 241. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
6. **Hypocopra macrospora** (Auersw.) Sacc. Syll. I, 241. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet, Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
7. **Hypocopra bombardoides** (Auersw. et Winter) Sacc. Syll. I, 243. — Versl. Med. Kon. Akad. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
8. **Hypocopra minima** (Sacc. et Speg.) Sacc. Syll. I, 244. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
9. **Hypocopra stercoraria** (Sow.) Sacc. Syll. I, 244. — Sphaeria stercoraria in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n°. 3081. Hypocopra stercoraria in Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.

In stercore equino et fimo cuniculorum. — Overveen. — Leiden. — Harderwijk.

10. **Hypocopra Karstenii** nov. sp. — Pertinet ad Sect. C. in Hansen Champ. Sterc. du Danemarck, Résumé p. 20. — Sporae in quovis asco 8, monostichae, ovales, 25 μ longae, 16 –17 μ latae, muco obductae, ad polam inferiorem globulo auctae, nigrae.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

11. **Hypocopra Serignanensis** Fabre in Ann. Sc. nat. 6, IX, 77; Sacc. Syll. I, 244 — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

12. **Hypocopra maxima** (Niessl) Sacc. Syll. I, 245. — Versl. Med. Kon. Ad. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

13. **Hypocopra papyricola** (Wint) Sacc. Syll. I, 245. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

In charta liquore stercoroso diutius madefacto. — Amsterdam.

COPROLEPA Fuck.

1. **Coprolepa merdaria** (Fr.) Fuck. Symb. 240; Sacc. Syll. I. 248. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

2. **Coprolepa equorum** Fuck. Symb. 240; Sacc. Syll. I, 249. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

In fimo equorum. — Amsterdam.

3. **Coprolepa Saccardoi** Oud. in Hedwigia 1882, p. 161; Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, XI.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

PHILOCOPRA Speg.

1. **Philocopra Hansenii** Oud. in Hedwigia 1882, p. 160;

Versl. Med. Kon. Ad. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, XI. — Sordaria Hansenii Oud. in Hedw. 1882, p. 123.

In fimo cuniculorum. — Haarlem.

2. **Philocopra plejospora** (Wint.) Sacc. Syll. I, 249.

In fimo cuniculorum. — Wageningen.

3. **Philocopra dubia** (Hansen) Sacc. Syll. I, 251. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

ROSELLINIA de Not.

1. **Rosellinia aquila** (Fr.) de Not. Sfer. ital. 21, t. 18; Sacc. Syll. I, 252. — Sphaeria aquila Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3072; Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.

In ramis variarum arborum. — Naaldwijk. — Utrecht.— Lochem. — Maastricht.

var. byssiseda (Tode) Sacc. ibid. — Sphaeria byssiseda in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3073. In ramis querneis et salicinis. — Enkhuizen. — Maastricht.

2. **Rosellinia mammiformis** (P.) Ces. et de Not. Sfer. ital., 227; Sacc, Syll. I, 258. — Sphaeria mammaeformis in Prodr. Fl. Bat. a⁰ 3080.

In ligno putrescente. — Zwake. — Maastricht.

BOMBARDIA Fr.

1. **Bombardia fasciculata** Fr. S. V. S. 389; Sacc. Syll. I, 277. — Sphaeria bombarda in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3083.

In truncis putrescentibus. — Maastricht.

ANTHOSTOMELLA Sacc.

1. **Anthostomella lugubris** (Roberge et Desm.) Sacc. Syll. I, 278. — Sphaeria lugubris in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3130.

In foliis siccis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

ANTHOSTOMA Nitschke.

1. **Anthostoma Xylostei** (P.) Sacc. Fgi ital. t. 162; Syll. I, 300. — Sphaeria Xylostei in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3101.
   In ramis Lonicerae Xylostei. — Utrecht.
2. **Anthostoma turgidum** (P.) Nitschke Pyren. Germ. 121; Sacc. Syll. I, 303. — Sphaeria turgida in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3037.
   In ramis fagineis. — Naaldwijk. — Maastricht.

XYLARIA Hill.

1. **Xylaria polymorpha** (P.) Grev. Fl. Edin. 35; Nitschke Pyren. Germ. 17; Sacc. Syll. I, 309. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2992; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.
   Ad truncos caesos. — Amsterdam. — Dordrecht, Naaldwijk. — Groningen. — Maastricht.
   Sicc. in Oud. Herb. van Nederl. Planten n⁰. 572.
2. **Xylaria coronata** West. in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2995; Sacc. Syll. I, 314,
   In truncis putridis. — Maastricht.
3. **Xylaria longipes** Nitschke Pyren. Germ. 14; Sacc. Syll. I, 328. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 92 et 183; Arch. Néerl. VIII, 403.
   Ad receptacula plantarum majorum putredine consumta in caldario Horti bot. Amstelaedamensis.
   Sicc. in Oud. Herb. v. Nederl. Pl. n⁰. 573.
4. **Xylaria Hypoxylon** (P.) Grev. Fl. Edin. 355; Nitschke Pyren. Germ. 5; Sacc. Syll. I, 133. — Sphaeria Hypoxylon in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Xylaria cornuta in Prodr. Fl. Bat n⁰. 2990.
   Ad truncos vetustos et ligna putredine consumta. — Leiden, Naaldwijk, Zwijndrecht. — Ubbergen. — Kampen. — Groningen. — Maastricht.
   var. cupressiformis P. — Sphaeria Hypoxylon var. cupressiformis in Tijds. Nat. Gen. XI, 393; Xylaria cupressiformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰.

2991. — Una cum forma typica. — Haarlem. — Leiden. — Goes.

var. pedata Fr. — Sphaeria Hypoxylon var. pedata in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Xylaria cupressiformis α pedata in Prodr. Fl. Bat. sub. n⁰. 2991. — Una cum forma typica. — Leiden, Dordrecht.

5. **Xylaria carpophila** (P.) Fr. S. V. S. 382; Nitschke Pyren. Germ. 6; Sacc. Syll. I, 336. — Sphaeria carpophila in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Xylaria carpophila in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2994.

In cupulis maturis putrescentibus Fagi sylvaticae. — Bloemendaal. — Leiden.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 273.

6. **Xylaria digitata** (L.) Grev. Fl. Edin. 356; Nitschke Pyren. Germ. 9; Sacc. Syll. I, 339. — Xylaria digitata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2993; Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

In ligno putrido et truncorum fraxineorum residuis. — Haarlem. — Leiden. — Renkom, Lochem, Zutphen.

7. **Xylaria filiformis** (A. S.) Fr. S. V. S. 382; Nitschke Pyren. Germ. 12; Sacc. Syll. I, 342. — Xylaria filiformis in Ned. Kr. Arch. 2, I. 92 et 183; Arch. Néerl. VIII, 403.

In ramulis et acubus Pinorum putrescentibus. — Naaldwijk. — Doorn.

PORONIA Willd.

1. **Poronia punctata** (L.) Fr. S. V. S. 382; Sacc. Syll. I, 348. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2989.

In stercore vetusto vaccino et leporino. — Sloten, Haarlem. — Naaldwijk. — Eerbeek. — Harderwijk.

USTULINA Tul.

1. **Ustulina vulgaris** Tul. S. F. C. II, 23; Sacc. Syll. I, 351. — Sphaeria deusta in Dozy et Molk Bijdr. 8;

Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3005. — Hypoxylon ustulatum in Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

Ad truncos salicinos et ad radices truncorum vegetorum Fagi sylvaticae. — Haarlem. — Leiden. — Baarn. — Doornwerth, Hemmen, Soerensch bosch.

HYPOXYLON Bull.

1. **Hypoxylon coccineum** Bull. Champ. de Fr. 174; Nitschke Pyren. Germ. 28; Sacc. Syll. I, 353.

   In ramis fraxineis. — Renkom.

2. **Hypoxylon fuscum** (P.) Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ. 35; Sacc. Syll. I, 361. — Sphaeria fusca in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2998.

   In ramis putrescentibus alneis et fagineis. — Amsterdam. — Leiden, Katwijk, Voorschoten, Naaldwijk. — Utrecht. — Kampen. — Goes. — Maastricht.

3. **Hypoxylon cohaerens** (P.) Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ, 42; Sacc. Syll. I, 361. — Sphaeria cohaerens in Tijds. Nat. Ges. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3000.

   In truncis putridis, praesertim Salicum. — Leiden.

4. **Hypoxylon multiforme** Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ. 43; Sacc. Syll. I, 363. — Sphaeria multiformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3002; Sphaeria granulosa ibid n⁰. 3001; Hypoxylon multiforme in Ned. Kr. Arch. 1, V. 342.

   In ramis truncisque Betulae, Alni, Fagi. — Bloemendaal, Zandvoort. — Leiden. — Naaldwijk. — Utrecht. — Renkom.

5. **Hypoxylon unitum** Nitschke Pyren. Germ. 44; Sacc. Syll. I, 384; Ned. Kr. Arch. 2, II, 185.

   In ramis quercinis decorticatis ad conficienda receptacula Orchidearum tropicarum adhibitis. — Amsterdam.

6. **Hypoxylon udum** (P.) Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ. 52; Sacc. Syll. I. 336. — Sphaeria confluens in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3004.

Ad ligna emollita Salicum. — Ankeveen. — Leiden. — Goes.

DALDINIA DE NOT. et CES.

1. **Daldinia concentrica** (Bolt.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 198; Sacc. Syll. I, 393. — Sphaeria concentrica in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n°. 2996.
In truncorum residuis. — den Haag, Leiden. — Lochem.

NUMMULARIA TUL.

1. **Nummularia Bulliardi** Tul. S. F. C. II, 43; Nitschke Pyren. Germ. 60; Sacc. Syll. I, 396. — Sphaeria Nummularia in Prodr. Fl. Bat. n°. 3006.
In ramis querneis et fagineis. — Maastricht.
2. **Nummularia repandoides** Fuck. Symb. 236; Sacc. Syll. I, 397. — Sphaeria operculata in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n°. 3096; Nummularia repandoides in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
In ligno putrescente Abietis et Alni. — Leiden.

Sect. 3. HYALOSPORAE SACC.

CERATOSTOMELLA SACC.

1. **Ceratostomella cirrhosa** (P.) Sacc. Syll. I, 408. — Sphaeria cirrhosa in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 406.
In ligno carioso molli Pini. — Lochem.

GNOMONIELLA SACC.

1. **Gnomoniella tubiformis** (Tode) Sacc. Syll. I, 413. — Sphaeria tubaeformis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n°. 3131.

In foliis alneis delapsis. — Leiden, Warmond, Voorschoten. — de Bildt. — Ubbergen.

2. **Gnomoniella vulgaris** (Ces. et de Not.) Sacc. Syll. I, 416. — Sphaeria Gnomon in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3132.
In foliis Coryli Avellanae. — Maastricht.

3. **Gnomoniella Euphorbiae** (Fuck.) Sacc. Syll. I, 418. — Sphaeria (Plagiostoma) Euphorbiae in Ned. Kr. Arch. 2, II, 103.
In caulibus emortuis Euphorbiae palustris. — Amsterdam.

4. **Gnomoniella fimbriata** (P.) Sacc. Syll. I, 419. — Dothidea fimbriata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3163.
In foliis adhuc vegetis Carpini Betuli. — Rotterdam.— Maastricht.

LAESTADIA Auersw.

1. **Laestadia carpinea** (Fr.) Sacc. Fgi ital. t. 543 et Syll. I, 426. — Sphaeria carpinea in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3137.
In foliis languescentibus Carpini Betuli. — Utrecht.

DITOPELLA de Not.

1. **Ditopella fusispora** de Not. Sfer. ital. t. 48; Sacc Syll. I, 450. — Sphaeria ditopa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3098; Halonia ditopa in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
In ramis alneis. — Naaldwijk. — Warmond. — Lochem.

BOTRYOSPHAERIA Ces. et de Not.

1. **Botryosphaeria Dothidea** (Moug. et Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 212. — Sphaeria Dothidea in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3056; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.

In ramis Robiniae Pseudacaciae et Rosarum. — Grebbe. — Hulst.

CRYPTOSPORELLA Sacc.

1. **Cryptosporella Limminghii** (West.) Sacc. Syll. I, 466.— Sphaeria Limminghii in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3027.
   In ramis ulmeis. — Amsterdam. — Leiden. — Groningen.

Sect. 4. Hyalodidymae Sacc.

SPHAERELLA Ces. et de Not.

1. **Sphaerella allicina** (Fr.) Auersw. in Rabenh. Mycol. Eur. Pyr. 19; Sacc. Syll. I, 422. — Sphaeria allicina in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3068.
   In foliis morientibus Allii Porri. — Leiden.
2. **Sphaerella brunneola** (Fr.) Cooke Brit. Fgi 922; Sacc. Syll. I, 423. — Sphaeria brunneola in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3139.
   In foliis Convallariae majalis. — Maastricht.
   Apud nos hucusque nonnisi immatura (Ascospora brunneola) visa.
3. **Sphaerella punctiformis** (P.) Rab. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 264; Sacc. Syll. I, 476. — Sphaeria punctiformis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3142.
   In foliis delapsis Quercus. — Leiden, Naaldwijk. — Zwake.
4. **Sphaerella maculiformis** (P.) Auersw. in Rab. Mycol. Europ. Pyren. 5; Sacc. Syll. I, 477. — Sphaeria maculiformis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3140; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.
   In foliis marcescentibus Quercus et Castaneae. — Leiden. — Utrecht. — Beek. — Kampen. — Maastricht.

5. **Sphaerella Taxi** Cooke Grev. VI, 128; Sacc. Syll. I, 480. — Sphaeria Taxi in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3108.
In foliis Taxi baccatae. — Goes.

6. **Sphaerella salicicola** (Fr.) Fuck. Symb. 106; Sacc. Syll. I, 487.
In foliis Salicis pentandrae. — Naaldwijk.

7. **Sphaerella macularis** (Fr.) Auersw. in Rab. Myc. Europ. Pyren. 9; Sacc. Syll. I, 488. — Sphaeria macularis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3109.
In foliis Acerum et Populorum. — Groningen.

8. **Sphaerella Brassicicola** (Duby) Ces. et de Not. Schema Sfer. 238; Sacc. Syll. I, 502. — Dothidea brassicae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3160.
In foliis Brassicae oleraceae. — Leiden. — Utrecht. — Goes.

9. **Sphaerella melanoplaca** (Desm.) Auersw. in Rab. Myc. Eur. Pyren. 13; Sacc. Syll. I, 506. — Sphaeria melanoplaca in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3147.
In foliis languescentibus Gei urbani. — Maastricht.

10. **Sphaerella Eryngii** (Wallr.) Cooke Brit. Fgi 917; Sacc. Syll. I, 511.
In foliis Eryngii maritimi. — Katwijk.

11. **Sphaerella Rumicis** (Desm.) Cooke Brit. Fgi 920; Sacc. Syll. I, 512. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.
In foliis Rumicis obtusifolii. — Haarlem.

12. **Sphaerella Passeriniana** Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, XLI. — Sphaeria Cruciferarum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3144.
In caulibus, pedunculis et fructibus Sisymbrii officinalis. — Goes.

13. **Sphaerella nebulosa** (P.) Sacc. Mich. II, 56; Syll. I, 515. — Sphaeria nebularis Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3064; Sphaeria nebulosa in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
In caulibus Umbelliferarum. — Leiden. — Lochem. — Maastricht.

14. **Sphaerella polygramma** (Fr.) Niessl neue Kernp. 87; Sacc. Syll. I, 5217. — Sphaeria polygramma in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3065.

In caulibus Aegopodii Podagrariae. — Leiden. — Maastricht.

15. **Sphaerella Asteroma** (Fr.) Karst. Myc. Fenn. II, 181; Sacc. Syll. I, 523. — Dothidea Asteroma in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396.

In foliis Polygonati multiflori. — Leiden.

Apud nos hucusque nonnisi sterilis (Ascospora Asteroma) reperta.

16. **Sphaerella graminicola** Fuck. Symb. 101; Sacc. Syll. I, 528.

In foliis Dactylis glomeratae. — Naaldwijk.

17. **Sphaerella lineolata** (Desm.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 237; Sacc. Syll. I, 531; Ned. Kr. Arch. 2, III, 257.

In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

18. **Sphaerella acerina** (Wallr.) Sacc. Syll. I, 536.

In foliis Aceris Pseudoplatani et campestris. — Naaldwijk.

19. **Sphaerella Atomus** (Desm.) Cooke Grevillea III, 169; Sacc. Syll. I, 536. — Sphaeria atomus in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3146.

In foliis Fagi sylvaticae. — Leiden. — Goes.

20. **Sphaerella Aucupariae** Plowr. Sphaer. Brit. n⁰. 65; Sacc. Syll. I, 537. — Sphaeria Aucupariae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3141.

In foliis delapsis Sorbi Aucupariae. — Domburg. — Maastricht.

Exempla nostra immatura stromatique spurio nigro insidentia Stigmateae generi maxime affinia visa sunt.

21. **Sphaerella Armoraciae** (Fuck.) Oud. in Fgi Neerl. exs. n⁰. 176; Sacc. Syll. I, 537.

In foliis Armoraciae rusticanae. — Amsterdam (Hort. Bot.). — Exempla immatura tantum visa.

22. **Sphaerella perforans** (Desm.) Sacc. Syll. I, 538. — Sphaeria perforans in Ned. Kr. Arch. 2, III, 161.

In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

23. **Sphaerella Polypodii** (Rabh.) Fuck. Symb. 102; Sacc.

Syll. I, 539. — Sphaeria aquilina in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Sphaeria polypodii in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3136.

In foliis Polypodii vulgaris et Aspidii filicis maris. — Haarlem. — Putten.

Exempla quae vidi omnia immatura.

STIGMATEA Fr.

1. **Stigmatea Robertiani** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 541. — Dothidea Robertiani in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3169.

   In foliis Geranii Robertiani. — Amsterdam. — Leiden. — Goes. — Maastricht.

2. **Stigmatea Geranii** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 541. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 317; Arch. Néerl. VIII, 407.

   In foliis Geranii dissecti. — Amsterdam.

3. **Stigmatea maculaeformis** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 542. — Sphaeria maculaeformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3140.

   In foliis delapsis Quercus et Castaneae. — Leiden. — Utrecht. — Kampen. — Maastricht.

4. **Stigmatea Ranunculi** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 542. — Dothidea Ranunculi in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396.

   In foliis Ranunculi repentis. — Goes.

5. **Stigmatea Ostruthii** (Fr.) Oud. Ascospor. 52; Sacc. Syll. I, 545. — Sphaeria Ostruthii in Prodr. Fl. Bat. 3145.

   In foliis Angelicae sylvestris. — Amsterdam.

   Exempla nostra in foliis adhuc vegetis lecta nonnisi immatura invenimus.

6. **Stigmatea Aegopodii** (Fr.) Oud. Ascosp. 52; Sacc. Syll. I, 545. — Dothidea Podagrariae in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395.

   In foliis Aegopodii Podagrariae. — Leiden.

7. **Stigmatea Sorbi** Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, II, 187.
In foliis Sorbi Aucupariae. — Lochem.

Exempla quae vidimus cuncta immatura. — Loco citato sequentia annotavimus: »In foliis Sorbi Aucupariae non raro maculae fuscescentes conspicuae fiunt, peritheciis minimis nigris sparsis sustentaculum praebentes. Haec perithecia primo a Laschio examinata (Klotzsch Herb. mycol. n⁰. 459, a⁰ 1844) ab eo generi Septoria, postea vero a Rabenhorstio (Kryptogamen-Flora a⁰ 1844, p. 170) generi Sphaeria, a Cesatio (Rabh. Fgi Europaei n⁰. 160) generi Cryptosporium, a Fiedlero tandem (Rabh. Fgi Europ. n⁰. 548) generi Depazea adscripta sunt. Laschio secuti sunt Fuckelius (Symb. Myc. 390), Cookius (Handbook, 448), alii.

Fiedlerus et Cookius fungilli sporas observasse perhibent earumque proprietates brevibus verbis adumbraverunt. Nullus tamen dubito quin illi viri in errorem ducti, alia corpuscula cum sporis commutaverint, quod eo probatur, nemini umquam contigisse sporas in ipso peritheciorum contextu observare. Hic enim semper, quamdiu folia in quibus luxuriantur perithecia putrefactioni non cecíderint, parenchymati e cellulis minoribus polygonis isodiametricis conflato simillimus est, ita ut nihil in illo distinguere liceat nisi nucleum cellulosum colore carentem, et parietem solidiorem e stratis cellularum duabus vel pluribus fuscis conformatum.

Quamquam exempla matura fungilli hujus memorabilis nondum reperta sint, tamen ejus fabrica et crescendi modus, nec minus analogia, jubent Stigmatearum generi eum adscribere. — Folia adhuc viridia fungo onusta legi m. Augusto a⁰ 1865."

DIDYMELLA Sacc.

1. **Didymella vexata** Sacc. Mich. II, 58; Syll. I, 547. — Sphaeria oblitescens in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
   In ramis Corni sanguineae. — Leiden.
2. **Didymella tosta** (B. et Br.) Sacc. Syll. I, 556. — Sphaeria (Diaporthe) tosta in Ned. Kr. Arch. 2, II, 104.
   In caulibus exsiccatis Epilobii hirsuti. — de Peel.
3. **Didymella aggregata** (Lasch) Sacc. Syll. I, 558. — Sphaeria aggregata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3053.
   In caulibus exsiccatis Euphrasiae Odontitis. — Goes.

GNOMONIA Ces. et de Not.

1. **Gnomonia setacea** (P.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 232; Sacc. Syll. I, 563. — Sphaeria setacea in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3134; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
   In foliis Quercus. — Naaldwijk. — Lochem.
2. **Gnomonia erythrostoma** (P.) Auersw. in Rab. Myc. Eur. Pyren. 26; Sacc. Syll. I, 566. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.
   In foliis Pruni avium. — Eerbeek.
3. **Gnomonia Cerastis** (Riess) Auersw. in Rab. Myc. Eur. Pyren. 27; Sacc. Syll. I, 569. — Sphaeria setacea α petiolicola in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3134.
   In petiolis Aceris Pseudoplatani et Aesculi Hippocastani. — Amsterdam. — Harderwijk.
4. **Gnomonia curvirostra** (Sow.) Sacc. Syll. I, 570. — Ned. Kr. Arch. 2, III, 257.
   In caulibus plantarum annuarum. — Naaldwijk.

EPICYMATIA Fuck.

1. **Epicymatia vulgaris** Fuck. Symb. 118; Sacc. Syll. I, 571. — Sphaeria Lichenicola in Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Sphaeria epicymatia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3106.

In apotheciis Lecanorae subfuscae et Physciae parietinae. — Leiden. — Utrecht. — Goes.

MELANOPSAMMA Nitschk.

1. **Melanopsamma pomiformis** (P.) Sacc. Mich. II, 58; Syll. I, 575. — Sphaeria pomiformis in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343; Arch. Néerl. VIII, 405.
   In ligno alneo corrupto. — Lochem.

BERTIA de Not.

1. **Bertia moriformis** (Tode) de Not. in Giorn. bot. ital. I, 335; Sacc. Syll. I, 582. — Sphaeria moriformis in Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3085.
   In ligno Salicum emollito. — Leiden. — Kampen. — Goes.

VENTURIA de Not. et Ces.

1. **Venturia Kunzei** Sacc. Fgi Ven. Ser. V, 174; Syll. I, 588. — Dothidea Chaetomium in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3161.
   In foliis Ruborum. — Goes.
2. **Venturia Potentillae** (Fr.) Cooke Grevillea VI, 76; Sacc. Syll. I, 594. — Dothidea Potentillae in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3159.
   In foliis Potentillae anserinae. — Goes. — Maastricht.

MELANCONIS Tul.

1. **Melanconis stilbostoma** (Fr.) Tul. S. F. C. II, 119; Sacc. Syll. I, 602. — Sphaeria stilbostoma in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3039.
   In ramis variarum arborum. — Leiden.

2. **Melanconis Alni** Tul. Ann. Sc. nat. 4, V, 109; Sacc. Syll. I, 604. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 403.

In ramis alneis. — Amsterdam.

HERCOSPORA Tul.

1. **Hercospora Tiliae** (Fr.) Tul. S. F. C. II, 154; Sacc. Syll. I, 605. — Sphaeria Tiliae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3099.

In ramis Tiliae delapsis. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden.

DIAPORTHE Nitschke.

1. **Diaporthe Chorostate Carpini** (P.) Fuck. Symb. 205; Sacc. Syll. I, 608. — Sphaeria Carpini Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3031.

In ramis carpineis. — 's Hertogenbosch.

2. **Diaporthe Chorostate longirostris** (Tul.) Sacc. Syll. I, 609. — Valsa Hystrix in Ned. Kr. Arch. 2, I, 264.

In ramis Aceris Pseudoplatani. — Naaldwijk.

3. **Diaporthe Chorostate Oudemansii** Sacc. Syll. I, 611. — Valsa Aesculi Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 403.

In ramis Aesculi Hippocastani. — Amsterdam.

4. **Diaporthe Chorostate oncostoma** (Duby) Fuck. Symb. 205; Sacc. Syll. I, 612. — Sphaeria rostrata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3093; Valsa oncostoma in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

In ramis Robiniae Pseudacaciae. — Amsterdam. — Leiden.

5. **Diaporthe Chorostate Strumella** (Fr.) Fuck. Syll. 205; Sacc. Syll. 613. — Sphaeria Strumella in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3019.

In ramis Ribis rubri. — Goes.

6. **Diaporthe Chorostate leiphaema** (Fr.) Sacc. Mycol. Ven. Spec. 135; Syll. I, 615.
In ramis querneis. — Amsterdam.

7. **Diaporthe Chorostate detrusa** (Fr.) Fuck. Symb. I, 205; Sacc. Syll. I, 619. — Sphaeria detrusa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3030.
In ramis emortuis Berberidis vulgaris. — Leiden.

8. **Diaporthe Chorostate salicella** (Fr.) Sacc. Mycol. Ven. Spec. 135; Syll. I, 622. — Sphaeria salicella in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3023; Ned. Kr. Arch. 2, I, 184; Arch. Néerl. VIII, 406.
In ramis salicinis. — Amsterdam. — Naaldwijk. — Goes.

9. **Diaporthe Chorostate sphingiophora** (Oud.) Sacc. Syll. I, 622. — Sphaeria sphingiophora Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 184; Arch. Néerl. VIII, 622.
In ramis Cornus albae. — Naaldwijk.

10. **Diaporthe Chorostate Hystrix** (Tode) Sacc. Fgi Veneti Ser. IV, 6; Syll. I, 623. — Valsa Hystrix in Arch. Néerl. VIII, 403.
In cortice Aceris Pseudoplatani. — Naaldwijk.

11. **Diaporthe Euporthe spiculosa** (A. S.) Nitschke Pyren. Germ. 256; Sacc. Syll. I, 633. — Sphaeria spiculosa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3020.
In ramis Viburni Opuli. — Utrecht.

12. **Diaporthe Euporthe ceuthosporioides** (Berk.) Sacc. Syll. I, 646.
In foliis Pruni Laurocerasi. — Goes.

13. **Diaporthe Euporthe Berkeleyi** (Desm.) Nitschke Pyren. Germ. 273; Sacc. Syll. I, 647. — Sphaeria Berkeleyi in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3127.
In caulibus Heraclei Sphondylii. — Goes.

14. **Diaporthe Euporthe nigrella** (Auersw.) Niessl Beitr. 51; Sacc. Syll. I, 648. — Sphaeria nigrella in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3128.
In caulibus variarum herbarum. — Warmond. — Maastricht.

15. **Diaporthe Euporthe inquilina** (Wallr.) Nitschke Pyren.

Germ. 272; Sacc. Syll. I, 650. — Sphaeria inquilina in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

In caulibus Umbelliferarum majorum. — Naaldwijk.

16. **Diaporthe Tetrastaga rudis** (Fr.) Nitschke Pyr. Germ. 282; Sacc. Syll. I, 662.

In ramis Cytisi Laburni. — Amsterdam.

Exempla quae vidi in statu spermogonifero versabantur.

17. **Diaporthe Tetrastaga rostellata** Nitschke Pyren. Germ. 298; Sacc. Syll. I, 667. — Sphaeria conjuncta in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3041; Sphaeria rostellata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3094; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.

In ramis Ruborum. — den Haag. — Baarn. — Harderwijk, Apeldoorn. — Maastricht.

18. **Diaporthe Tetrastaga Lirella** (Moug. et Nestler) Fuck. Symb. 206; Sacc. Syll. I, 668. — Sphaeria lirella Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3061.

In caulibus Spiraeae Ulmariae. — Leiden, Naaldwijk. — Blauwkapel.

Exempla omnia quae vidi immatura.

19. **Diaporthe Tetrastaga controversa** (Desm.) Fuck. Symb. App. I, 31; Sacc. Syll. I, 676. — Sphaeria controversa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3034.

In ramis Corni sanguineae, Aceris Negundinis, Fraxini excelsioris et Syringae vulgaris. — Leiden, Naaldwijk.

20. **Diaporthe Tetrastaga striaeformis** (Fr.) Nitschke in Fuck. Symb. 206; Sacc. Syll. I, 690.

In caulibus Epilobii montani. — Naaldwijk.

Sect. 5. Phaeodidymae Sacc.

DIDYMOSPHAERIA Fuck.

1. **Didymosphaeria conoidea** Niessl Neue Kernp. in Oesterr. bot. Zeits. 1874, p. 202; Sacc. Syll. I, 702.

In caulibus siccatis Urticae. — Domburg.

2. **Didymosphaeria epidermidis** (Fr.) Fuck. Symb. 141; Sacc. Syll. I, 709. — Sphaeria epidermidis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3107.
In ramis Berberidis vulgaris. — Naaldwijk. — Goes.

DELITSCHIA Auersw.

1. **Delitschia Auerswaldii** Fuck. Symb. 241; Sacc. Syll. I, 732. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
2. **Delitschia bisporula** (Crouan) Hansen Fgi fimicoli Dan. 107; Sacc. Syll. I, 732. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.
In fimo cuniculorum. — Wageningen.
3. **Delitschia Winteri** Plowr. Brit. Fgi in Grevillea II, 188; Sacc. Syll. I, 734. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.
In fimo cuniculorum. — Brielle.
4. **Delitschia Niesslii** Oud. Hedw. 1882, p. 163. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 388. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, LIII.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
5. **Delitschia leptospora** Oud. Hedw. 1882, p. 163; Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, LIII.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
6. **Delitschia microspora** Oud. Hedw. 1882, p. 165; Versl. en Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 388.
In fimo cuniculorum. — Overveen.

OTTHIA Nitschke.

1. **Otthia Syringae** (Fr.) Niessl. Hedw. 1876, p. 2; Sacc. Syll. I, 737. — Sphaeria Syringae in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3103.
In ramis emortuis Syringae vulgaris. — Goes.

Sect. 6. Phaeophragmiae Sacc.

MASSARIA de Not.

1. **Massaria macrospora** (Desm.) Sacc. Syll. II, 11. — Cucurbitaria macrospora in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In cortice betulino vetusto. — Naaldwijk.

LEPTOSPHAERIA Ces. et de Not.

1. **Leptosphaeria Doliolum** (P.) de Not. Schema Sfer. 235; Sacc. Syll. II, 14. — Sphaeria Doliolum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3117.
   In caulibus emortuis Angelicae sylvestris. — Leiden, Naaldwijk. — Blauwkapel. — Maastricht.
2. **Leptosphaeria Clivensis** (B. Br.) Sacc. Syll. II, 16. — Sphaeria clivensis in Ned. Kr. Arch. 2, III, 160.
   In foliis Caricis laevigatae. — Goes.
3. **Leptosphaeria nigrella** (Rabh.) Sacc. Syll. II, 21. — Sphaeria nigrella in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3128.
   In caulibus Lychnidis diurnae. — Warmond. — Maastricht.
4. **Leptosphaeria Bardanae** (Wallr.) Sacc. Syll. II, 34. — Sphaeria Bardanae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3123.
   In caulibus Lappae tomentosae. — Utrecht.
5. **Leptosphaeria maculans** (Desm.) Ces. et de Not. in Comm. Soc. bot. Ital. I, 235; Sacc. Syll. II, 35.
   In caulibus Phaseoli nani. — Naaldwijk.
6. **Leptosphaeria haematites** (Rob. et Desm.) Sacc. Syll. II, 36. — Sphaeria haematites in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3113.
   In ramulis siccis Clematidis Vitalbae. — Goes.
7. **Leptosphaeria modesta** (Desm.) Karst. Mycol. Fenn. II, 106; Sacc. Syll. II, 39. — Sphaeria modesta in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3115.
   In caulibus herbarum majorum. — Goes.

8. **Leptosphaeria agnita** (Desm.) de Not et Ces. Schema Sfer. 236; Sacc. Syll. II, 40. — Sphaeria (Pleospora) agnita in Ned. Kr. Arch. 2, II, 104.
In caulibus Eupatorii cannabini. — Amsterdam.

9. **Leptosphaeria acuta** (Moug.) Karst. Mycol. Fenn. II, 98; Sacc. Syll. II, 41. — Sphaeria acuta in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3114; Sphaeria coniformis ibid. n⁰. 3116.
In caulibus Urticae et Umbelliferarum. — Amsterdam. — Leiden, Warmond. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.

10. **Leptosphaeria arundinacea** (Sow.) Sacc. Fgi Ven. Ser. II, 320; Syll. II, 62. — Sphaeria arundinacea in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3062.
In caulibus Phragmitidis vulgaris.
var. Godini Sacc. Syll. II, 63. — Sphaeria Godini in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3063. — Una cum forma typica in culmis Phragmitidis vulgaris. — Amsterdam. — Leiden.

11. **Leptosphaeria epicarecta** (Cooke) Sacc. Syll. II, 65.
In foliis Caricis laevigatae. — Goes.

12. **Leptosphaeria nigrans** (Desm.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 235; Sacc. Syll. II, 70. — Sphaeria nigrans in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3129.
In culmis Dactylidis glomeratae. — Boxmeer.

13. **Leptosphaeria Rusci** (Wallr.) Sacc. Syll. II, 74. — Sphaerella Rusci in Arch. Néerl. II, 46.
In cladodiis Rusci aculeati. — Amsterdam (hort. bot.).

14. **Leptosphaeria culmifraga** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 235; Sacc. Syll. II, 75. — Sphaeria culmifraga in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3120.
In culmis Graminum. — Naaldwijk. — Goes.

CLYPEOSPHAERIA Fuck.

1. **Clypeosphaeria Notarisii** Fuck. Symb. 117; Sacc.

Syll. II, 90. — Sphaeria clypeata in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 407.
In ramis Ruborum. — Lochem.

MELANOMMA Nitschke et Fuck.

1. **Melanomma Pulvis pyrius** (P.) Fuck. Symb. 160; Sacc. Syll. II, 98. — Sphaeria pulvis pyrius Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3087.
In ligno corrupto. — Muiden. — Leiden, Rijnsburg, Naaldwijk. — Utrecht. — Beek, Soerensch bosch. — Goes. — Maastricht.
2. **Melanomma Aspegrenii** (Fr.) Fuck. Symb. 159; Sacc. Syll. II, 100. — Sphaeria Aspegrenii in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
In ramis dejectis. — Leiden.
3. **Melanomma Epochnii** (B. Br.) Sacc. Mich. I, 344; Syll. II, 104. — Sphaeria Epochnii in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
In cortice quodam putrescente. — Leiden.

TREMATOSPHAERIA Fuck.

1. **Trematosphaeria pertusa** (P.) Fuck. Symb. 162; Sacc. Syll. II, 115. — Sphaeria pertusa in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3090.
In ligno putrido. — Leiden. — Goes.
2. **Trematosphaeria applanata** (Oud.) Sacc. Syll. II, 120.— Sphaeria applanata Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186; Sphaeria operculata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3096.
In ligno vetusto. — Leiden.

SPORORMIA de Not.

1. **Sporormia minima** Auersw. in Hedw. 1878, p. 661;

Sacc. Syll. II, 124. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

2. **Sporormia ambigua** Niessl Oesterr. bot. Zeits. 1878, p. 41; Sacc. Syll. II, 125. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

3. **Sporormia lageniformis** Fuck. Symb. 242; Sacc. Syll. II, 125. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo equino. — Amsterdam.

4. **Sporormia intermedia** Auersw. in Hedw. 1868, p. 67; Sacc. Syll. II, 126. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo herbivororum variorum. — Amsterdam.

5. **Sporormia megalospora** Auersw. Hedw. a⁰ 1868, p. 68; Sacc. Syll. II, 126. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Wageningen.

6. **Sporormia gigantea** Hansen Fgi fimicoli Danici 113 et Résumé 16; Sacc. Syll. II, 127. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In stercore cuniculorum. — Brielle.

7. **Sporormia leptosphaerioides** Spegaz. Michelia I, 459; Sacc. Syll. II, 128. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

8. **Sporormia pentamera** Oud. (n. sp.). Asci absque pedicello 190 μ longi' 38 μ lati, itaque lanceolati, obtusi. Sporae tristichae (?), pentamerae, 80 μ longae, 16—17 μ latae. Articuli duo ultimi obtuse conici, 18—19 μ longi, articuli tres intermedii 11—12 μ longi, omnes fusci et mucilagine obducti.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

9. **Sporormia variabilis** Wint. Hedw. 1874, p. 50; Sacc. Syll. II, 129. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

10. **Sporormia pulchra** Hansen Fgi fimicoli Danici 113 et Résumé 17; Sacc. Syll. II, 131. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet Afd. Nat. 2, XVIII, 390.
In fimo cuniculorum. — Brielle.

AGLAOSPORA de Not.

1. **Aglaospora profusa** (Fr.) de Not. Microm. ital. decas V; Sacc. Syll. II, 133. — Sphaeria Anomia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3029.
In ramis Robiniae Pseudacaciae. — Hilversum. — Harderwijk.

PSEUDOVALSA Ces. et de Not.

1. **Pseudovalsa lanciformis** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 206; Sacc. Syll. II, 135. — Sphaeria lanciformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3016.
In ramis betulinis. — Leiden (?).
2. **Pseudovalsa convergens** (Tode) Sacc. Syll. II, 136. — Valsa convergens in Ned. Kr. Arch. 1, V, 345; Arch. Néerl. VIII, 404.
Sub cortice ramorum Fagi. — Lochem.
3. **Pseudovalsa Berkeleyi** (Tul.) Sacc. Syll. II, 137. — Melanconis Berkeleyi in Ned. Kr. Arch. 2, III, 156.
In ramis Ulmi campestris. — Amsterdam.
4. **Pseudovalsa Kickxii** (West.) Sacc. in Lambotte Fl. Myc. Belg. II, 359; Syll. II, 139. — Valsa Kickxii in Ned. Kr. Arch. 2, III, 157.
In ramis Platani orientalis. — Amsterdam. — Edidi in Rab. Fgi Eur. n⁰. 2219 et in Oud. Fgi Neerl. n⁰. 173.

Sect. 7. Hyalophragmiae Sacc.

MASSARINA Sacc.

1. **Massarina eburnea** (Tul.) Sacc. Syll. II, 153.
In ramis betulinis. — Maartensdijk.

METASPHAERIA Sacc.

1. **Metasphaeria Hederae** (Sow.?) Sacc. Syll. II, 169. — Sphaeria Hederae in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Sphaerella Hederae Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 317; Arch. Néerl. VIII, 407.
In pagina inferiore foliorum Hederae Helicis. — Amsterdam.
2. **Metasphaeria Junci** (Oud.) Sacc. Syll. II, 177. — Sphaeria Junci Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, 1, 265; Arch. Néerl. VIII, 405.
In foliis et culmis Junci glauci. — Naaldwijk. — Utrecht, Baarn.
3. **Metasphaeria Iridis** (Desm.) Sacc. Syll. II, 178. — Dothidea Iridis in Prodr. Fl. Bat. n°. 3168.
In foliis Iridis Pseudacori. — Leiden.
4. **Metasphaeria Bellynckii** (West.) Sacc. Syll. II, 178.
In caulibus Polygonati multiflori. — Naaldwijk.
5. **Metasphaeria sabuletorum** (B. Br.) Sacc. Syll. II, 180. — Sphaeria sabuletorum in Ned. Kr. Arch. 2, III, 257; Sphaeria (Leptosphaeria) sabuletorum in Oud. Fgi Néerl. exs. n°. 276.
In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlemmerduin.

SPHAERULINA Sacc.

1. **Sphaerulina myriadea** (D.C.) Sacc. Syll. II, 186. — Sphaeria myriadea in Prodr. Fl. Bat. n°. 3138.
In foliis delapsis Quercuum. — Zwake.

HYPOSPILA Fr.

1. **Hypospila bifrons** (D.C.) Fr. S. V. S 421; Sacc. Syll. II, 190. — Sphaeria bifrons in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3069.
   In foliis quercinis. — Leiden.

LASIOSPHAERIA Ces. et de Not.

1. **Lasiosphaeria hirsuta** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 229; Sacc. Syll. II, 191. — Sphaeria hirsuta in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3076.
   In ligno putrescente. — Naaldwijk. — Goes.
2. **Lasiosphaeria hispida** (Tode) Fuck. Symb. 147; Sacc. Syll. II, 194.
   In ramis alneis. — Naaldwijk.
3. **Lasiosphaeria spermoides** (Hoffm.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 229; Sacc. Syll. II, 198. — Sphaeria spermoides in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3084.
   In truncis querneis et salicinis vetustis. — Amsterdam. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.
4. **Lasiosphaeria ovina** (P.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 229; Sacc. Syll. II, 199. — Sphaeria ovina in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3075.
   In ligno salicino emollito. — Naaldwijk. — Willemspolder.
5. **Lasiosphaeria crinita** (P.) Sacc. Syll. II, 201. — Sphaeria crinita in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343; Arch. Néerl. VIII, 405.
   In ligno putrescente. — Lochem.
6. **Lasiosphaeria biformis** (P.) Sacc. Syll. II, 204.
   In terra arenosa humida. — Lochem.

MELOMASTIA Nitschke et Fuck.

1. **Melomastia Friesii** Nitschke in Fuck. Symb. App. I, 306; Sacc. Syll. II, 213. — Sphaeria mastoidea in

Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3089; Sphaeria lonicerae ibid. n⁰. 3104; Sphaeria fraxinicola in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

In ramis salicinis, fraxineis et Lonicerae Periclymeni. — Haarlem. — Utrecht, de Bildt.

ZIGNOELLA Sacc.

1. **Zignoella? insculpta** (Fr.) Sacc. Syll. II, 225. — Sphaeria insculpta in Ned. Kr. Arch. 2, I, 184; Arch. Néerl. VIII, 405.

In ramis Ilicis Aquifolii. — Amsterdam. — Naaldwijk.

CALOSPORA Sacc.

1. **Calospora Platanoides** (P.) Niessl; Sacc. Syll. II, 231. — Sphaeria stilbostoma α umbilicata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3039 α; Valsa platanoides in Ned. Kr. Arch. 2, III, 157.

In ramis corticatis Aceris Pseudoplatani. — Amsterdam.

2. **Calospora Innesii** (Curr.) Sacc. Syll. II, 231. — Valsa Innesii in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 404.

In ramis Aceris Pseudoplatani. — Naaldwijk.

Sect. 8. Dictyosporae Sacc.

PLEOSPORA Rab.

1. **Pleospora mucosa** (Fuck.?) Speg. Nova Add. n⁰. 85; Sacc. Syll. II, 245. — Sphaeria mucosa in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3055.

In fructuum Cucurbitae Peponis cortice putrescente. — Leiden.

2. **Pleospora herbarum** (P.) Rab. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 547; Sacc. Syll. II, 247. — Sphaeria herbarum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3122; Ned. Kr. Arch. 2, III, 160.

   In caulibus siccatis herbarum plurimarum (Alismae Plantaginis, Allii Porri, Aristolochiae Clematitidis, Asparagi officinalis, Asteris Tripolii, Brassicae oleraceae, Cardamines hirsutae, Cardui spec., Centaureae sp., Cichorii Endiviae, Cirsii lanceolati, Cochleariae anglicae, Convolvuli tricoloris, Cynoglossi officinalis, Eryngii maritimi, Euphrasiae Odontitidis, Hypochaeridis radicatae, Oenotherae biennis, Lathyri latifolii, Phaseoli vulgaris, Rumicis sp., Solani tuberosi, Tamaricis gallicae, Urticae. — Amsterdam, Bloemendaal. — Leiden, Katwijk, Naaldwijk. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.

3. **Pleospora Pisi** (Sow.) Fuck. Symb. 131; Sacc. Syll. II, 248. — Sphaeria Pisi in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3118.

   In caulibus Pisi sativi. — Goes.

4. **Pleospora Leguminum** (Wallr.) Rabh. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 548; Sacc. Syll. II, 254. — Sphaeria Leguminum Oud. in litt.

   In leguminibus maturis Coluteae arborescentis. — Amsterdam (Hort. bot.).

5. **Pleospora scirpicola** (D.C.) Karst. Myc. Fenn. II, 72; Sacc. Syll. II, 265. — Sphaeria scirpicola in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3121.

   In foliis et culmis Scirpi lacustris. — Goes.

PYRENOPHORA Fr.

1. **Pyrenophora pellita** (Fr.) Sacc. Syll. II, 280. — Sphaeria pellita in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3111.

   In caulibus Papaveris aliarumque herbarum. — Warmond.

TEICHOSPORA Fuck.

1. **Teichospora obducens** (Fr.) Fuck. Symb. 161; Sacc. Syll. II, 295. — Sphaeria obducens α minor in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3082.
   In ramis Fraxini excelsioris. — Naaldwijk. — Utrecht.

CUCURBITARIA Gray.

1. **Cucurbitaria Berberidis** (P.) Gray's Natur. Arrang. I, 519; Sacc. Syll. II, 308. — Sphaeria Berberidis in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3049.
   In ramis Berberidis vulgaris. — Amsterdam. — Leiden, Naaldwijk. — Utrecht.
2. **Cucurbitaria Laburni** (P.) de Not. Erb. critt. ital. n⁰. 875; Sacc. Syll. II, 308. — Sphaeria Laburni in Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3046.
   In ramis Cytisi Laburni. — Leiden.
3. **Cucurbitaria elongata** (Fr.) Grev. Scott. t. 195; Sacc. Syll. II, 309. — Sphaeria elongata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3054; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
   In ramis Robiniae Pseudacaciae. — Leiden. — Utrecht, de Grebbe.
4. **Cucurbitaria Spartii** (Nees) Ces. et de Not. Schema Sfer. 214; Sacc. Syll. II, 312. — Sphaeria Spartii in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3057.
   In ramis Sarothamni vulgaris. — Axel.
5. **Cucurbitaria occultata** Oud. Arch. Néerl. VIII, 404.— Sacc. Syll. II, 317. — Cucurbitaria rugosa in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183.
   In ramis Syringae vulgaris. — Naaldwijk.

FENESTELLA Tul.

1. **Fenestella Frit** (Fr.) Sacc. Syll. II, 332. — Valsa Frit in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In ramis Aceris Negundinis. — Naaldwijk.

Sect. 9. SCOLECOSPORAE SACC.

OPHIOBOLUS RIESS.

1. **Ophiobolus porphyrogenus** (Tode) Sacc. Syll. II, 338.— Sphaeria rubella in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3112; Sphaeria erythrospora in Arch. Néerl. VIII, 407; Rhaphidospora erythrospora Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 265.

   In caulibus Urticae. — Amsterdam, Haarlem, Bloemendaal. — Leiden. — Maastricht.

   Exempla siccata edidi in Rab. Fgi Eur. n⁰. 1555.

2. **Ophiobolus Urticae** (Rab.) Sacc. Mich. II, 324; Syll. II, 338.

   In caulibus Urticae. — Overveen.

3. **Ophiobolus acuminatus** (Sow.) Duby ap. Rab. in Kickx Crypt. des Fl. I, 361; Sacc. Syll. II, 340.

   In caulibus Carduorum, — Haarlem.

4. **Ophiobolus Eryngii** (Oud.) Sacc. Syll. II, 345. — Sphaeria Eryngii α petiolicola West. in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3143; Sphaeria (Rhaphidophora) Eryngii Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, III, 257.

   In foliis et petiolis Eryngii maritimi. — Harderwijk.

LINOSPORA FUCK.

1. **Linospora Capreae** (D.C.) Fuck. Symb. 124; Sacc. Syll. II, 354. — Sphaeria saligna in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3133.

   In foliis Salicis Capreae. — Maastricht.

2. **Linospora populina** (P.) Schröt. in Rab. Fgi. Eur. n⁰. 2429; Sacc. Syll. II, 357. — Sphaeria ceuthocarpa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3070.

   In foliis Populi tremulae. — Wassenaar. — Goes. — Maastricht.

SILLIA KARST.

1. **Sillia ferruginea** (P.) Karst. Myc. Fenn. II, 159 et

251; Sacc. Syll. II, 361. — Sphaeria ferruginea in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3017.

In ramis coryleis. — Maastricht.

APPENDIX.

Sphaeriaceae imperfecte cognitae.

SPHAERIA Fr.

1. **Sphaeria pruinosa** Fr. S. M. II, 486. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3100.

   In cortice fagineo. — Leiden. — Maastricht.

2. **Sphaeria varia** P. Syn. 52; Sacc. Syll. II, 389. — Sphaeria varia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3050.

   In cortice ramorum Pruni. — Maastricht.

Fam. III. HYPOCREACEAE de Not.

Sect. 1. Hyalosporae Sacc.

HYPONECTRIA Sacc.

1. **Hyponectria Buxi** (D.C.) Sacc. in Mich. I, 250 et Syll. II, 455. — Sphaeria Buxi in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.

   In foliis Buxi sempervirentis. — Rotterdam. — Lochem.

POLYSTIGMA Pers.

1. **Polystigma rubrum** (P.) D.C. Mém. Mus. 337; Sacc. Syll. II, 458. — Dothidea rubra in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Polystigma rubrum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3150.

   In foliis Pruni spinosae vegetis. – Amsterdam. — Beek. — Maastricht.

2. **Polystigma ochraceum** (Wahlb.) Sacc. Consp. Pyren. 20; Syll. II, 458. — Dothidea fulva in Tijds. Nat.

Gesch. XI, 396. — Polystigma fulvum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3149.

In foliis vegetis Pruni Padi. — den Haag.

NB. var α aurantiacum West in Prodr. Fl. Bat. p. 69, sistit spermogonia Roesteliae cancellatae.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus Sectionis apud nos hucusque frustra quaesitae.

Sect. 3. HYALODIDYMAE SACC.

HYPOMYCES FR.

1. **Hypomyces aurantius** (P.) Fuck. Symb. 183; Sacc. Syll. II, 470. — Sphaeria aurantia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3071.

In Polyporis suberosis corruptis. — Maastricht.

NECTRIA FR.

1. **Nectria cinnabarina** (Tode) Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 479. — Sphaeria cinnabarina Tijds. Nat Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3043; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.

In ramis et truncis arborum plurimorum. — Amsterdam. — Leiden. — Kampen. — Groningen. — Goes. — Maastricht.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 471.

2. **Nectria Ribis** (Tode) Rab. Fgi Eur. n⁰. 264; Sacc. Syll. II, 480. — Sphaeria Ribis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3045.

In ramis Ribis rubri et nigri. — Leiden, Naaldwijk. — Goes. — Maastricht.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 168.

3. **Nectria coccinea** (P.) Fr. S. V. S. 368; Sacc. Syll. II, 481. — Sphaeria coccinea in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3044; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.

In ramis alneis et Prunorum. — Amsterdam. — Leiden. — Goes. — Maastricht.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 472.

Huc pertinet Sph. fragiformis Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2997.

4. **Nectria Cucurbitula** (Tode?) Fr. S. V. S. 388 p.p.; Sacc. Syll. II, 484; Ned. Kr. Arch. 1, V, 343; Arch. Néerl. VIII, 403.

In ramis et acubus Pini. — Lochem.

5. **Nectria chrysitis** Rab. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 632; Sacc. Syll. II, 488. — Nectria chrysitis in Ned. Kr. Arch. 2, I, 92 et 182; Arch. Néerl. VIII, 402.

In trunco putrescente. — Amsterdam.

6. **Nectria sanguinea** (Sibth.) Fr. S. V. S. 385; Sacc. Syll. II, 493. — Sphaeria sanguinea in Prod. Fl. Bat. n⁰. 3078.

In ligno alneo. — Amsterdam. — Rotterdam, Naaldwijk.

7. **Nectria citrina** Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 494. — Nectria Citrum Oud. in Arch. Néerl. VIII, 402.

In ligno putrescente. — Naaldwijk.

8. **Nectria episphaeria** (Tode) Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 497. — Sphaeria episphaeria in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3079; Nectria episphaeria in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.

In stromate Diatrypellae quercinae et Diatrypes Stigmatis. — Haarlem. — Utrecht.

9. **Nectria Peziza** (Tode) Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 501. — Sphaeria peziza in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3077.

In ligno putrescente. — Amsterdam. — Naaldwijk. — Maastricht.

METANECTRIA Sacc.

1. **Metanectria Citrum** (Wallr.) Sacc. Mich. I, 300; Syll. II, 517. — Nectria Citrum in Ned. Kr. Arch. 2, II, 42.
   In ligno alneo corrupto. — Naaldwijk.

Sect. 4. PHAEODIDYMAE Sacc.

Species hujus Sectionis apud nos hucusque frustra quaesitae.

Sect. 5. PHRAGMOSPORAE Sacc.

CALONECTRIA Sacc.

1. **Calonectria erubescens** (Desm.) Sacc. Mich. I, 309; Syll. II, 545. — Sphaeria erubescens in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3086.
   In foliis Ilicis Aquifolii. — Goes.
2. **Calonectria Oudemansii** (West.) Sacc. Mich. I, 308; Syll. II, 546. — Nectria Oudemansii in Arch. Néerl. II, 46.
   In ramis putrescentibus Urostigmatis Neumanni in caldario Horti bot. Amstelaed.

GIBBERELLA Sacc.

1. **Gibberella pulicaris** (Fr.) Sacc. Mich. I, 43; Sacc. Syll. II, 552. — Sphaeria pulicaris in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3052.
   In ramis sambucinis. — Leiden.
2. **Gibberella cyanogena** (Desm.) Sacc. Syll. II, 555. — Sphaeria cyanogena in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3048.
   In caulibus putrescentibus Brassicae. — Amsterdam. — Leiden.
3. **Gibberella acervalis** (Moug.) Sacc. Mich. I, 318; Syll.

II, 555. — Sphaeria acervalis in Prodr. Fl Bat. n⁰. 3047.

In ramis fraxineis et salicinis. — Maastricht.

Sect. 6. DICTYOSPORAE SACC.

Species hujus Sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 7. SCOLECOSPORAE SACC.

CLAVICEPS TUL.

1. **Claviceps purpurea** (Fr.) Tul. A. S. N. 3, XX, 26 et 45; Sacc. Syll. II, 564. — Cordiceps purpurea in Arch. Néerl. II, 45.

In sclerotio florum locum occupante intra glumas Secales cerealis. — Amsterdam, etc.

Ipsa sclerotia praeterea carpsi in floribus Bromi grossi et Lolii perennis.

2. **Claviceps microcephala** (Wallr.) Tul. A. S. N. 3, XX, 49.

In sclerotio florum locum occupante intra glumas Phragmitidis communis.

CORDYCEPS FR.

1. **Cordyceps militaris** Lk. Handb. III, 347; Sacc. Syll. II, 572. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2988; Ned. Kr. Arch. 1, V, 341.

In sylvis in larvis insectorum corruptis. — Naaldwijk. — Driebergen. — Lochem. — Veenwouden.

2. **Cordyceps ophioglossoides** (Ehrh.) Lk. Handb. III, 347; Sacc. Syll. II, 574. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2987; Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

In Elaphomyce muricata parasitans. — Driebergen. — Renkom, Doorwerth, Lochem.

EPICHLOE. Fr.

1. **Epichloe typhina** Fr. (ut subg.) S. V. S. 381; Tul. S. F. C. III. 24; Sacc. Syll. II, 578. — Dothidea typhina in Tijds. Nat. Ges. XI, 395; Polystigma typhinum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3151; Epichloe typhina in Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.

In foliis Dactylidis glomeratae, Holci mollis, Agrostidis specierum, etc. — Amsterdam, Haarlem, Naarden. — Leiden, Naaldwijk, Noordwijkerhout. — Doorn. — Culemborg, Lochem. — Goes. — Maastricht.

Fam. IV. DOTHIDEACEAE Nitschke et Fuckel.

Sect. 1. Hyalosporae Sacc.

PHYLLACHORA Nke et Fuck.

1. **Phyllachora Ulmi** (Duv.) Fuck. Symb. 218; Sacc. Syll. II, 594. — Dothidea Ulmi in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3170.

In foliis Ulmi campestris. — Amsterdam. — Leiden. — Beek, Ubbergen, Harderwijk. — Kampen. — Maastricht.

2. **Phyllachora Graminis** (P.) Fuck. Symb. 216; Sacc. Syll. II, 602. — Sphaeria Graminis in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3066; Dothidea Graminis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3166.

In foliis Graminum morientium plurimorum. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden, Naaldwijk. — Culemborg. — Maastricht.

3. **Phyllachora gangraena** (Fr.) Fuck. Symb. 217; Sacc. Syll. II, 604. — Sphaeria gangraena in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3148.

In foliis languescentibus variarum Graminearum. — Boxmeer.

4. **Phyllachora Pteridis** (Reb.) Fuck. Symb. 218; Sacc. Syll. II, 607. — Dothidea Pteridis in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

In foliis Pteridis aquilinae. — Beek.

Exempla quae vidi immatura.

5. **Phyllachora Trifolii** (P.) Fuck. Symb. 218; Sacc. Syll. II, 613. — Sphaeria Trifolii in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3067.

In foliis Trifolii repentis. — Amsterdam, Bloemendaal. — Leiden, Naaldwijk. — Harderwijk, Nijmegen. — Zwake.

6. **Phyllachora Podagrariae** (Roth.) Karst. Myc. Fenn. II, 228; Sacc. Syll. II, 615. — Sphaeria Aegopodii in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395.

In foliis Aegopodii Podagrariae languescentibus. — Amsterdam. — Leiden.

Apud nos hucusque nonnisi in statu immaturo (= Ascospora) reperta.

7. **Phyllachora Caricis** (Fr.) Sacc. Syll. II, 625. — Dothidea Caricis in Ned. Kr. Arch. 2, I, 316; Arch. Néerl. VIII, 403.

In foliis Caricis cujusdam. — Nijkerk.

8. **Phyllachora depazeoides** (Desm.) Lambotte Fl. Myc. Belge II, 398; Sacc. Syll. II, 696. — Dothidea depazeoides in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3167.

In foliis adhuc vegetis Buxi sempervirentis. — Maastricht.

Sect. 2. Phaeosporae Sacc.

Species hujus Sectionis hucusque frustra apud nos quaesitae.

Sect. 3. Hyalodidymae Sacc.

DOTHIDELLA Speg.

1. **Dothidella thoracella** Sacc. Syll. II, 630.

In foliis Sedi purpurascentis in dunis maritimis et arenosis Patriae, sed semper immatura.

SCIRRHIA Nitschke.

1. **Scirrhia depauperata** (Desm.) Fuck. Sumb. 221; Sacc. Syll. II, 634. — Ned. Kr. Arch. 2, III, 256.
   In foliis Phragmitidis communis. — Utrecht.
2. **Scirrhia rimosa** (A. S.) Fuck. Symb. 221; Sacc. Syll. II, 635. — Sphaeria rimosa in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3058. — Scirrhia rimosa in Ned. Kr. Arch. 2, I, 264.
   In vaginis foliorum Phragmitidis communis. — Haarlem. — Leiden, Voorschoten. — Utrecht. — Maastricht.
   Exs. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 281.

PLOWRIGHTIA Sacc.

1. **Plowrightia ribesia** (P.) Sacc. Syll. II, 635. — Dothidea ribesia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3152; Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.
   In ramis Ribis rubri. — Naaldwijk. — Utrecht. — Lochem. — Goes. — Maastricht.

Sect. 4. Phaeodidymae Sacc.

DOTHIDEA Fr.

1. **Dothidea Sambuci** (P.) Fr. S. M. II, 551; Sacc. Syll. II, 639. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3153.
   In ramis sambucinis. — Leiden. — Maastricht.
2. **Dothidea puccinioides** (D.C.) Fr. S. M. II, 551; Sacc. Syll. II, 641. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3154.
   In ramis emortuis Buxi sempervirentis. — Goes.

Sect. 5. PHRAGMOSPORAE SACC.

RHOPOGRAPHUS NITSCHKE.

1. **Rhopographus filicinus** (Fr.) Fuck. Symb. II, 648. — Sphaeria in Prodr. Fl, Bat. n⁰. 3059.
In stipitibus Pteridis aquilinae. — Maastricht.

Sect. 6. DICTYOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 7. SCOLICOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Fam. V. MICROTHYRIACEAE Sacc.

Sect. 1. HYALOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 3. HYALODIDYMAE.

MICROTHYRIUM DESM.

1. **Microthyrium microscopicum** Desm. Ann. Sc. Nat.

1841, p. 138; Sacc. Syll. II, 662. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3327.

In foliis Ilicis Aquifolii. — Leiden.

2. **Microthyrium Quercus** Fuck Symb. 98; Sacc. Syll. II, 663. — Ned. Kr. Arch. 2, II, 187,

In foliis querneis. — Leiden.

Sect. 4. PHAEODIDYMAE.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 5. PHRAGMOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 6. CLOSTEROSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Fam. VI. LOPHIOSTOMACEAE Sacc.

Sect. 1. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 2. PHAEODIDYMAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 3. Hyalodidymae Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 4. Hyalophragmeae Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 5. Phaeophragmiae Sacc.

LOPHIOSTOMA Ces. et de Not.

1. **Lophiostoma caulium** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 219; Sacc. Syll. II, 697. — Sphaeria caulium in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3119.
   In caulibus exsiccatis Umbelliferarum. — Maastricht.
2. **Lophiostoma Arundinis** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 220; Sacc. Syll. II, 699. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 264; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In culmis Phragmitidis communis. — Rotterdam.
3. **Lophiostoma macrostomum** (Tode) Ces. et de Not. Schema Sfer. 219; Sacc. Syll. II, 700. — Sphaeria macrostoma in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3092.
   In cortice vetusto. — Rijnsburg.

Sect. 6. Dictyosporae Sacc.

LOPHIDIUM Sacc.

1. **Lophidium diminuens** (P.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 220; Sacc. Syll. II, 714. — Sphaeria diminuens in Dozy et Molk. Bijdr. 8.
   In ramis Corni sanguineae. — Leiden.

Sect. 7. SCOLECOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Fam. VII. HYSTERIACEAE Corda.

Sect. 1. HYALOSPORAE SACC.

SCHIZOTHYRIUM DESM.

1. **Schizothyrium Ptarmicae** Desm. Ann. Sc. Nat. 3, XI, 361; Sacc. Syll. II, 725. — Labrella Ptarmicae in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3325.
   In caulibus et foliis Achilleae Ptarmicae. — Leiden.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis apud nos hucusque nondum repertae.

Sect. 3. HYALODIDYMAE SACC.

AULOGRAPHIUM LIB.

1. **Aulographium vagum** Desm. Ann. Sc. Nat. 2ᵉ S., XIX, 362; Sacc. Syll. II, 727. — Aylographum vagans in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3204.
   In foliis Ilicis Aquifolii et Hederae Helicis. — Zutphen.

GLONIUM MÜHL.

1. **Glonium lineare** (Fr.) de Not. Giorn bot. ital. II, 594; Sacc. Syll. II, 732. — Hysterium lineare in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3190.
   In ligno quercino. — Goes, Willemsdorp.

Sect. 4. PHAEODIDYMAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 5. PHAEOPHRAGMIAE SACC.

HYSTERIUM TODE.

1. **Hysterium pulicare** P. Syn. 98; Sacc. Syll. II, 743. — Dozy et Molk. Bijdr. 7; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3188.
In ligno et cortice Quercus Roboris, Populi et Salicis albi. — Leiden, den Haag. — Harderwijk. — Goes. — Maastricht.

Sect. 6. HYALOPHRAGMIAE SACC.

DICHAENA FR.

1. **Dichaena strobilina** Fr. S. V. S. 40; Sacc. Syll. II, 771. — Sphaeria strobilina in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3105; Dichaena strobilina in Ned. Kr. Arch. 2, III, 161.
In squamis conorum Abietum. — Leiden. — Apeldoorn.

Sect. 7. HYALODICTYAE SACC.

GLONIOPSIS DE NOT.

1. **Gloniopsis Rocheana** (Duby) Sacc. Syll. II, 773. — Hysterium rocheanum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3192.
Ad cortices ignotos. — Leiden (Hort. bot.).

Sect. 8. PHAEODICTYAE SACC.

HYSTEROGRAPHIUM CDA.

1. **Hysterographium Fraxini** (P.) de Not. Pir. Ist. 22;

Sacc. Syll. II, 776. — Hysterium Fraxini in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3191.

In ramis Fraxini excelsioris. — Leiden. — Utrecht.— Maastricht.

Sect. 9. SCOLECOSPORAE SACC.

HYPODERMA DC.

1. **Hypoderma Hederae** (Mart.) de Not. Pir. Ist. 36; Sacc. Syll. II, 784. — Hysterium Hederae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3202.

   In foliis Hederae Helicis. — Leiden.

2. **Hypoderma Lauri** (Fr.) Duby Hyst. 43; Sacc. Syll. II, 784. — Hysterium Lauri in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3197.

   In foliis Lauri nobilis. — Leiden (Hort. bot.).

3. **Hypoderma conigenum** (P.) Cooke Brit. Fgi 712; Sacc. Syll. II, 786. — Hysterium conigenum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3194.

   In squamis putrescentibus strobilorum Pini sylvestris. — Leiden. — Maastricht.

4. **Hypoderma virgultorum** DC. Fl. Fr. VI, 165; Sacc. Syll. II, 786. — Hysterium rubi et Hysterium petiolare in Ned. Kr. Arch. 1, V, 341; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3195.

   In sarmentis Ruborum et in petiolis Aceris Pseudoplatani. — Utrecht. — Lochem. — Maastricht.

5. **Hypoderma commune** (Fr.) Duby Hyst. 41; Sacc. Syll. II, 788. — Hysterium commune in Arch. Néerl. VIII, 402.

   In caule exsiccato Rumicis cujusdam. — Naaldwijk.

6. **Hypoderma scirpinum** (DC.) Fl. Fr. VI, 166; Sacc. Syll. II, 788. — Hysterium scirpinum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3198.

   In caulibus putrescentibus Scirpi lacustris. — Leiden.

LOPHODERMIUM Chev.

1. **Lophodermium hysterioides** (P.) Sacc. Syll. II, 791. — Hysterium foliicolum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3201.
   In foliis emortuis Crataegi Oxyacanthae. — Nijmegen.
2. **Lophodermium petiolicolum** Fuck. Symb. 255; Sacc. Syll. 793. — Hysterium punctiforme in Dozy et Molk. Bijdr. 7; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3203; Hysterium petiolare in Ned. Kr. Arch. 1, V, 341; Arch. Néerl. VIII, 402.
   In petiolis foliorum Quercus et Aceris Pseudoplatani. — Haarlem. — Leiden. — Lochem.
3. **Lophodermium Pinastri** (Schrad.) Chev. Fl. de Paris I, 430; Sacc. Syll. II, 794. — Hysterium pinastri in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3196 (inclusis varietatibus α et β); Lophodermium Pinastri in Ned. Kr. Arch. 2, III, 156.
   In acubus Pini sylvestris, Pinastri, Cembrae et Abietis excelsae et in squamis strobilorum Pini sylvestris. — Leiden. — Harderwijk, Apeldoorn, Zutphen, Wageningen.
4. **Lophodermium juniperinum** (Fr.) de Not. Pir. Ist. 40; Sacc. Syll. II, 794. — Hysterium pinastri β juniperinum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3196 quoad var. c.
   In acubus Juniperi communis et Sabinae. — Leiden. — de Bildt.
5. **Lophodermium arundinaceum** (Schrad.) Chev. Fl. de Paris, I, 435; Sacc. Syll. II, 795. — Hysterium arundinaceum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3199; Lophodermium culmigenum α gramineum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3200 α.
   In culmis Phragmitidis communis. — Bloemendaal. — Leiden. — Utrecht. — Goes.
   var. abbreviatum Sacc. Syll. II, 795. — Hysterium culmigenum var. abbreviatum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3200 β.
   In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

LOPHIUM Fr.

1. **Lophium mytilinum** (P.) Fr. S. M. II, 593; Sacc. Syll. II, 799. — Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 402.
   Ad ligna caesa. — Lochem.

COLPOMA Wallr.

1. **Colpoma quercinum** (P.) Wallr. Fl. Cr. 423; Sacc. Syll. II, 803. — Cenangium quercinum in Tijds. Nat. Gesch. XII, 270; Colpoma quercinum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3205.
   In ramis quercinis. — Leiden. — Beek. — Maastricht.

ACROSPERMUM Tode.

1. **Acrospermum compressum** Tode Fgi Mecklb. I, 8; Sacc. Syll. II, 807. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2936.
   In caulibus siccatis Urticae et Cardin. — Maastricht.
2. **Acrospermum graminum** Lib. exs. Ard. n⁰. 33; Sacc. Syll. II, 807. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2937.
   In foliis Poae et Elymi. — Goes.

RECAPITULATIO

qua numerus Pyrenomycetum in regno Batavorum hucusque detectorum illustratur.

	Numerus specierum.
Fam. I. Perisporiaceae.	
Subfamilia 1. Erysipheae.	29
» 2. Perisporieae.	11
» 3. Capnodieae.	3
	43
Fam. II. Sphaeriaceae.	
Sect. 1. Allantosporae.	
Coelosphaeria.	2
Calosphaeria.	1
Quaternaria	2
Valsa	7
Eutypella.	2
Eutypa.	6
Cryptosphaeria.	1
Diatrype	3
Diatrypella	3
	27
Sect. 2. Phaeosporae.	
Ceratostoma.	1
Chaetomium.	4
Sordaria	7
Hypocopra	13
Coprolepa.	3
Philocopra	3
Rosellinia.	2

	Numerus speciérum.
Bombardia	1
Anthostomella	1
Anthostoma	2
Xylaria	7
Poronia	1
Ustulina	1
Hypoxylon	6
Daldinia	1
Nummularia	2
	55

Sect. 3. Hyalosporae.

Ceratostomella	1
Gnomoniella	4
Laestadia	1
Ditopella	1
Botryosphaeria	1
Cryptosporella	1
	9

Sect. 4. Hyalodidymae.

Sphaerella	23
Stigmatea	7
Didymella	3
Gnomonia	4
Epicymatia	1
Melanopsamma	1
Bertia	1
Venturia	2
Melanconis	2
Hercospora	1
Diaporthe	20
	65

Sect. 5. Phaeodidymae.

Didymosphaeria	2
Delitschia	6
Otthia	1
	9

	Numerus specierum.
Sect. 6. Phaeophragmiae.	
Massaria	1
Leptosphaeria	14
Clypeosphaeria	1
Melanomma	3
Trematosphaeria	2
Sporormia	10
Aglaospora	1
Pseudovalsa	4
	36
Sect. 7. Hyalophragmiae.	
Massaria	1
Metasphaeria	5
Sphaerulina	1
Hypospila	1
Lasiosphaeria	6
Melomastia	1
Zignoella	1
Calospora	2
	18
Sect. 8. Dictyosporae.	
Pleospora	5
Pyrenophora	1
Teichospora	1
Cucurbitaria	5
Fenestella	1
	13
Sect. 9. Scolecosporae.	
Ophiobolus	4
Linospora	2
Sillia	1
	7
Appendix	2

	Numerus specierum.
Fam. III. Hypocreaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Hyponectria	1
Polystigma	2
	3
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Hypomyces	1
Nectria	9
Metanectria	1
	11
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Sect. 5. Phragmosporae.	
Calonectria	2
Gibberella	3
	5
Sect. 6. Dictyosporae.	
Sect. 7. Scolecosporae.	
Claviceps	2
Cordyceps	2
Epichloe	1
	5
Fam. IV. Dothideaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Phyllachora	8
	8
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Dothidella	1
Scirrhia	2
Plowrightia	1
	4
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Dothidea	2
	2

	Numerus specierum.
Sect. 5. Phragmosporae.	
Rhopographus	1
	1
Sect. 6. Dictyosporae.	
Sect. 7. Scolicosporae.	
Fam. V. Microthyriaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Microthyrium	2
	2
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Sect. 5. Phragmosporae.	
Sect. 6. Closterosporae.	
Fam. VI. Lophiostomae.	
Sect. 1. Phaeosporae.	
Sect. 2. Phaeodidymae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Sect. 4. Hyalophragmiae.	
Sect. 5. Phaeophragmiae.	
Lophiostoma.	3
	3
Sect. 6. Dictyosporae.	
Lophidium	1
	1
Sect. 7. Scolecosporae.	
Fam VII. Hysteriaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Schizothyrium	1
	1
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Aulographium	1
Glonium	1
	2

	Numerus specierum.
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Sect. 5. Phaeophragmiae.	
Hysterium	1
	1
Sect. 6. Hyalophragmiae.	
Dichaena	1
	1
Sect. 7. Hyalodictyae.	
Gloniopsis	1
	1
Sect. 8. Phaeodictyae.	
Hysterographium	1
	1
Sect. 9. Scolecosporae.	
Hypoderma	6
Lophodermium	5
Lophium	1
Colpoma	1
Acrospermum	2
	15

Fam. 1. Perisporiaceae	43
» 2. Sphaeriaceae	241
» 3. Hypocreaceae	24
» 4. Dothideaceae	15
» 5. Microthyriaceae	2
» 6. Lophiostomae	4
» 7. Hysteriaceae	22
	351 species.

ADVIES

OVER EEN

ANTWOORD AAN Z. E. DEN MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN

BETREKKELIJK

DE IN OCTOBER 1883 TE ROME GEHOUDEN GEODETISCHE CONFERENTIE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884).

In de zevende algemeene geodetische conferentie, in October 1883 te Rome gehouden, is gesproken over de invoering van een algemeenen eersten meridiaan en van een gemeenschappelijken tijd, en is vastgesteld, de Italiaansche Regeering uit te noodigen, de besluiten van de vergadering ter kennis van de verschillende Regeeringen te brengen.

Volgens de Commissie, die de zaak ter tafel bracht, is de invoering van een algemeenen eersten meridiaan wenschelijk, zoowel in het belang van de wetenschap, als in dat van de zeevaart, den handel en de internationale gemeenschap, en verdient het aanbeveling, dat voortaan een zelfde stelsel van lengten, althans voor de algemeene geographische en hydrographische instituten en bureaux, zoowel als voor alle astronomische en nautische tafelen worde gebruikt.

Als eersten meridiaan stelt zij voor aan te nemen dien, gaande door het midden der steunpunten van den meridiaankijker van het observatorium van GREENWICH, van waar de lengten in ééne richting, gaande van het westen naar het oosten, zullen geteld worden.

Voor sommige wetenschappelijke doeleinden en voor den dienst der groote gemeenschapsmiddelen, zooals de spoor-

wegen, de stoomvaart, de telegrafen en de post, acht zij de invoering van een algemeenen tijd, nevens den lokalen, van groot belang, en zij stelt voor om den gemiddelden middag van GREENWICH, die overeenstemt met het oogenblik van middernacht, of den aanvang van den burgerlijken dag, onder den meridiaan, die 12^{u} of 180^{0} van GREENWICH verwijderd is, als aanvangspunt van den algemeenen tijd en den werelddatum aan te nemen, en daarbij uren van 0 tot 24 te tellen.

Door den Italiaanschen Gezant te 's Gravenhage werden de wenschen van de conferentie aan Z.Exc. den Minister van Buitenlandsche Zaken medegedeeld, met verzoek hem te willen berichten, welk onthaal zij bij de Nederlandsche Regeering hadden gevonden.

De Minister van Binnenlandsche Zaken heeft de Akademie uitgenoodigd, hem haar gevoelen te doen kennen over het antwoord, dat door zijner Majesteits Regeering aan den Italiaanschen Gezant zal kunnen gegeven worden, en de Akademie heeft verlangd, dienaangaande door eene, door haar benoemde, Commissie te worden voorgelicht.

Die Commissie vereenigt zich geheel met de meening, welke, omtrent het behandelen van dit onderwerp op de geodetische conferentie, door de Rijkscommissie voor graadmeting en waterpassing, in haar, bij de stukken gevoegd, verslag aan den Minister van Binnenlandsche Zaken is kenbaar gemaakt, dat namelijk »bij deze zaak belangen in het »spel komen, die door eene Commissie van geodeten, zooals »die te Rome vergaderd was, niet in haar geheel kunnen »beoordeeld worden; dat zij veeleer de belangen van de »cartographie, de marine, de administratie der posterijen, »de telegraphie en de spoorwegen, dan die der geodesie »raken, en elke beslissing, hierin door de geodetische con»ferentie genomen, doelloos zijn zou, zoo zij niet in over»eenstemming was met de belangen, waarvan de bevordering »niet tot haren werkkring behoort".

Uwe Commissie meent dan ook dat de besluiten, genomen in de algemeene geodetische conferentie te Rome, geene wijziging behoeven te brengen in het gevoelen, door de

Akademie met betrekking tot het invoeren van een algemeenen eersten meridiaan en het bijwonen van eene conferentie ter bespreking van dit onderwerp, in hare vergadering van 24 Februari 1883 aangenomen.

Gedeeltelijk toch zijn de besluiten der algemeene conferentie in overeenstemming met het uitgesproken gevoelen der Akademie, wat betreft den algemeenen eersten meridiaan; gedeeltelijk hebben zij, naar de meening Uwer Commissie, minder waarde door de bovengenoemde eigenaardige samenstelling der algemeene conferentie.

Naar aanleiding van een en ander stelt Uwe Commissie voor, aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te antwoorden, dat men aan den Italiaanschen Gezant zou kunnen berichten, dat van de besluiten der algemeene geodetische conferentie te Rome met groote belangstelling is kennis genomen; dat deze besluiten voor een groot deel overeenkomen met de denkbeelden der Regeering, en dat deze zich reeds heeft bereid verklaard om zich in eene, door de Regeering van de Vereenigde Staten van Noord-Amerika bijeen te roepen, conferentie te laten vertegenwoordigen.

Het komt Uwer Commissie niet wenschelijk voor, den Italiaanschen Gezant geheel omtrent de zienswijze der Regeering, met betrekking tot de zaak zelve, in te lichten, omdat dit wellicht minder kiesch zou zijn tegenover de Regeering, van welke later eene uitnoodiging tot bijwoning eener conferentie mocht uitgaan.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
CH. M. SCHOLS.
MICHAËLIS.

RAPPORT

OVER DEN DOOR

DEN HEER **VAN DE SANDE BAKHUYZEN**

UIT NAAM VAN

Dr. **N. M. KAM** te *Schiedam*

AAN DE

AFD. NATUURK. DER KON. AKAD. VAN WETENSCHAPPEN

TER UITGAVE AANGEBODEN

CATALOG VON STERNEN, DEREN OERTER DURCH SELBSTÄNDIGE MERIDIANBEOBACHTUNGEN BESTIMMT WORDEN SIND, AUS BAND 1 BIS 66 DER ASTRONOMISCHEN NACHRICHTEN REDUCIRT AUF 1855.

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884).

Tot het verkrijgen eener juiste kennis van de loopbanen der lichamen van ons zonnestelsel is het noodig, hunne schijnbare plaatsen aan het hemelruim zoo dikwijls mogelijk te bepalen. Twee verschillende handelwijzen worden daartoe voornamelijk gebruikt, namelijk de meridiaanwaarnemingen, waarbij de rechte klimming en declinatie van het hemellichaam te gelijk gevonden worden, — de eerste door den tijd van doorgang, de tweede door de aflezing van den vertikalen cirkel —, en de zoogenaamde relatieve bepalingen, waarbij door mikrometers het verschil in rechte klimming en declinatie gemeten wordt tusschen het bedoelde bewegelijke hemellichaam, hetzij planeet (asteroide) of komeet, en eene vaste ster.

Tot de nauwkeurige bepaling van de schijnbare plaats

der planeet of komeet, is het dan nog slechts noodig de rechte klimming en declinatie der tot vergelijking gebruikte ster juist te kennen.

Somtijds vindt men deze in een der bestaande stercatalogi, maar daar de vergelijkingssterren dikwijls vrij zwak zijn (9 of 10e grootte), zoekt men ze daarin dikwijls te vergeefs, en is de sterrekundige genoodzaakt, wil hij zijne relatieve plaatsbepaling niet verloren doen gaan, de plaats der vergelijkingsster opzettelijk in den meridiaan te bepalen.

Op die wijze zijn in deze eeuw eenige duizenden bepalingen van de plaatsen van vaste sterren geschied. Elk jaar leverde daartoe zijn contingent, en reeds in 1859 uitte Argelander in de inleiding van het derde deel der *Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn* den wensch, dat al deze bepalingen eens verzameld en de rechte klimmingen en declinaties tot één tijdstip herleid in ééne enkele zoogenoemde sterrelijst zouden vereenigd worden.

Reeds het volgende jaar deelde wijlen ons medelid M. Hoek mede, dat aan dezen wensch gevolg gegeven zou worden, en dat de Heeren Dibbits, Groneman en Martins op zijn verzoek besloten hadden den arbeid te ondernemen.

Drie jaar later kon Hoek reeds aankondigen, dat, ondanks vele hindernissen, de herleidingen goed gevorderd waren, en reeds eene lijst van ongeveer 2500 sterren gereed lag.

De Heeren Groneman en Martins werden echter weldra door ambtsbezigheden gedwongen, hunne berekeningen te staken, die nu door de Heeren Hoek en Dibbits werden vervolgd, totdat laatstgenoemde door het aanvaarden eener betrekking aan de H. B. S. te Amsterdam eveneens zijne deelneming aan den gemeenschappelijken arbeid moest opgeven.

Hoek, die de berekeningen niet alleen wilde voortzetten, stelde nu aan Dr. N. M. Kam voor, zijne taak over te nemen, hetgeen bereidwillig werd aangenomen.

Bij de verdere berekening bracht de Heer Kam echter eenige kleine wijzigingen in het oorspronkelijk plan. Hij zag er wegens verschillende bezwaren van af, al de afzonderlijke sterreplaatsen, die in de verschillende tijdschriften en periodieke werken zijn medegedeeld, in zijne lijst op te nemen,

maar bepaalde zich tot die, welke in de *Astron. Nachrichten* voorkomen, daar deze toch verreweg het talrijkst zijn. Daarentegen breidde hij het werk uit door niet alleen, zooals aanvankelijk bedoeld was, de sterren op te geven uit de 60 eerste deelen van de *Astron. Nachrichten*, maar daaraan toe te voegen de sterreplaatsen uit deel 61—66 van dat tijdschrift. Hierdoor werd geheele aansluiting verkregen aan de lijst van onherleide sterreplaatsen door Prof. SCHJELLERUP te Kopenhagen in de publicaties van de *Astron. Gesellschaft* uitgegeven. Het aantal opgenomen sterreplaatsen nam hierdoor met ongeveer 700 toe.

Na eene inleiding, waarin Dr. KAM de geschiedenis van dezen wetenschappelijken arbeid mededeelt en de door hem en de overige medewerkers gevolgde berekeningswijzen aangeeft, volgt de eigenlijke catalogus, welken de Heer KAM zich genoopt zag in drie afdeelingen te verdeelen.

De eerste lijst bevat de plaatsen, gevonden door zelfstandige meridiaanwaarnemingen en bevat 4891 sterren. De tweede lijst die sterren, waaromtrent wel eene zelfstandige waarneming is volbracht, maar waarvan de plaats berust op het gemiddelde van de uitkomsten dier waarnemingen en die van andere sterrekundigen; zij bevat 240 sterren. De derde lijst eindelijk bevat die sterren, waarvan alleen rechte opklimming of alleen declinatie bepaald is, en bevat 325 sterren. De drie lijsten bij elkander geven dus de volledige of onvolledige plaats aan van 5456 sterren.

Wij moeten nog vermelden dat de Heer KAM, alle dergelijke sterreplaatsen, die in de *Astron. Nachrichten* voorkomen, maar die reeds elders zijn bekend gemaakt, *niet* in zijne lijsten heeft opgenomen.

De tabellen, waaruit de genoemde drie sterrelijsten bestaan, bevatten de volgende kolommen.

1. Het rangnummer.

2. Epoche der waarnemingen, d. i. jaar en breuk van een jaar, aanduidende het oogenblik, waarop de sterreplaats bepaald was.

3. Epoche der sterreplaats, d. i. jaar waarvoor de middelbare sterreplaats reeds in de *Astronomische Nachrichten* voorkomt.

4. Grootte der ster.

5. Middelbare rechte opklimming der ster, herleid tot 1855,0.

Dit tijdstip is gekozen, omdat de groote Bonner lijst van benaderde sterreplaatsen, bekend onder den naam van *Bonner Durchmusterung*, ook op 1855 herleid is, en het dus door deze inrichting gemakkelijk zijn zal de sterren met die der *Durchmusterung* te identificeeren.

6. Het aantal der waarnemingen.

7. De praecessie in rechte klimming voor elke sterreplaats, voor 1855.

8. De *seculaire variatie* van die praecessie.

9. De zoogenoemde 3de term van die variatie, die alleen bij sterren met hooge declinatie in rekening genomen moet worden.

10—14. De middelbare declinatie voor 1855, het aantal waarnemingen en dezelfde opgaven voor de praecessie in declinatie, als reeds voor die in rechte klimming genoemd zijn.

15. Deel en bladzijde der *Astron. Nachrichten*, waar de plaatsbepalingen te vinden zijn.

16. Plaats der waarneming.

Achter elk der drie lijsten is een groot aantal aanmerkingen gevoegd, waarin alle bijzonderheden vermeld staan, die voor een critisch gebruik van de in die lijsten vermelde sterreplaatsen noodig is.

De uitgebreide berekeningen van den Catalogus zijn, zooals de schrijver ons mededeelt, alle dubbel verricht, zoodat er weinig gevaar voor cijferfouten bestaat. Door eene oordeelkundige vergelijking van zijne sterreplaatsen met die in andere catalogi, o. a. in de *Bonner Durchmusterung*, is ook eene zeer gewenschte controle verkregen op de juistheid der oorspronkelijke opgaven in de *Astron. Nachrichten*.

Groote zorg heeft de Heer Kam besteed aan de herleiding van de schijnbare tot middelbare plaatsen. Voor elken waarnemer heeft hij nagegaan van welken sterrekundigen almanak hij zich bij de bepaling van den stand van zijn uurwerk en van het poolpunt van zijn meridiaancirkel bediende, en naar aanleiding hiervan òf de grootheden uit het *Berliner*

Jahrbuch òf uit den *Nautical Almanac* bij zijne herleidingen gebruikt.

De praecessie is naar de constante van BESSEL berekend, die, volgens het onderzoek van MÄDLER en andere sterrekundigen, de voorkeur boven die van STRUVE verdient.

Uit het medegedeelde blijkt genoegzaam, dat door den Heer KAM en zijne voorgangers, waartoe ook ons tegenwoordig medelid DIBBITS behoort, een zeer nuttig werk is verricht, dat groote diensten kan bewijzen aan hen, die nauwkeurige sterreplaatsen behoeven voor hunne relatieve plaatsbepalingen van planeten en kometen, maar vooral bij een hernieuwd onderzoek omtrent praecessie en eigenbeweging der sterren.

Hiertoe moet echter hun Catalogus gedrukt, en zooals dit in de sterrekundige wereld het gebruik is, in een ruim aantal exemplaren verspreid worden. Van eene publicatie op eigen kosten kan dus geen sprake zijn, terwijl het daarentegen geheel op den weg van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ligt, om die taak op zich te nemen en zoo de studie der sterrekunde naar haar vermogen te bevorderen.

Ondergeteekenden adviseeren derhalve aan de Afdeeling, de door den Heer KAM aangeboden Sterrelijst met bijvoegsels, in hare verhandelingen op te nemen.

Utrecht en *Leiden*, J. A. C. OUDEMANS.
18 Februari 1884. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER J. W. GILTAY:

OVER HET POLARISEEREN VAN TELEFONISCHE GELEIDERS.

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884).

De Commissie, benoemd in Uwe Vergadering van 26 Januari l.l. ten einde advies uit te brengen over de door den Heer J. W. GILTAY aangeboden verhandeling: *Over het polariseeren van telefonische ontvangers*, heeft de eer het volgende mede te deelen.

De verhandeling bevat de resultaten van een uitvoerig onderzoek omtrent de verschijnselen, die zich voordoen, wanneer een condensator als ontvanger in eene telefonische geleiding wordt geplaatst.

Onder de vele pogingen, die aangewend zijn om de telefonie tot grootere volkomenheid te brengen, behoort het bezigen van een electrischen condensator aan het ontvangstation. De zoogenaamde luchtcondensator van Prof. DOLBEAR is daarbij merkwaardig door zijnen grooten eenvoud; hij bestaat uit twee evenwijdige metalen cirkelplaatjes, die op zeer kleinen afstand, geïsoleerd van elkander, in een ebonieten ring zijn bevestigd. Wordt de eene plaat, die met de geleiding verbonden is, door den stroom geladen, zoo induceert zij eene tegengestelde lading op de andere plaat en de daarbij gevolgde aantrekking der platen is voldoende om oscilleerende electrische stroomen in geluidgolven om te zetten.

Het eigenaardige voordeel van zoodanigen ontvanger be-

staat in het grootendeels verdwijnen der ook als geruischen schadelijk werkende, storende inductiestroomen, die nu, zoowel bij het afwezig zijn der anders voorkomende draadspiralen, als bij het ontbreken van eene gesloten metaalgeleiding, moeten vervallen. POLLARD en GARNIER verbeterden die inrichting, toen zij den enkelen condensator door eene condenseerende batterij vervingen, bestaande uit een zeker aantal blaadjes bladtin, gescheiden door lagen postpapier, en die om de andere met eene klemschroef en met een tweeden geleider verbonden werden. Die condensator werd in den secundairen draad van eene inductieklos geplaatst, en wanneer nu in den primairen draad, door het zingen vóór eene in dezen gebrachte plaat, een electrische stroom snel werd afgebroken, ontstonden in den secundairen draad even schielijk op elkander volgende inductiestroomen, die de lading van den condensator voortdurend veranderden en zijne plaatjes in trilling brachten, waardoor het oorspronkelijke geluid, hoewel gewijzigd, weder te voorschijn kwam. Zoo ontstond de zingende condensator, ook wel, naar zijn vorm, het zingende boek genoemd.

Deze proef kreeg in 1881, door de inrichting van HERZ en DUNAND, praktische waarde voor de telefonie. Zij brachten eene microfoon in de primaire geleiding van eene inductieklos, waarvan de secundaire draadeinden verbonden werden met de bekleedsels van eenen uit verscheidene elementen bestaanden condensator. Werd in de microfoon gesproken, zoo liet de condensator slechts een krakend geluid vernemen. DUNAND kwam nu op de goede gedachte, aan den condensator eene permanente lading te geven, door eene galvanische batterij in de secundaire geleiding te plaatsen. Zoodra dit gedaan was, bleek het, dat de condensator alle gearticuleerde geluiden nauwkeurig kon wedergeven.

De Heer GILTAY nu heeft deze telefonische werking van den condensator nader onderzocht en voornamelijk getracht eene verklaring te geven van de schijnbaar zoo vreemde werking dier met den condensator verbondene ladingsbatterij; eene werking, die ondanks de proeven van vele natuurkundigen nog niet tot helderheid was gebracht.

Bij verschillende proeven van den schrijver bleek:

1⁰. Dat, bij een condensator zonder ladingsbatterij, van het gesprokene geen woord is te verstaan; men hoort slechts een sterk geraas. De vijf klinkers zijn niet te onderscheiden, alleen is de *O* het sterkst en zijn de *I* en *U* het zwakst.

2⁰. De condensator, geladen door een Leclanché-element, geeft de vijf klinkers te onderscheiden, terwijl het gesprokene vrij goed is te verstaan.

3⁰. Wordt de condensator door twee Leclanché-elementen geladen, zoo kan men alles goed onderscheiden en verstaan.

Ten einde zich nu hiervan rekenschap te geven, stelt schrijver door eene kromme lijn in functie van den tijd de sterkte van den stroom voor, die in den primairen geleider ontstaat, wanneer voor eene daarin geplaatste microfoon een enkelvoudige toon wordt voortgebracht. De in den secundairen geleider geplaatste condensator zal door den hierin ontstaanden inductiestroom beurtelings geladen en ontladen worden, en dezelfde kromme lijn geeft eene voorstelling in grootte en teeken van de ladingen, die zich naar den condensator begeven. Tengevolge dier ladingen zullen de tinnen blaadjes van den condensator elkander aantrekken en afstooten, en door eene eenvoudige redeneering meent de schrijver te mogen besluiten, dat deze werkingen eene *andere* wet volgen; zoodat de periodieke kromme dezer beweging de halve periode van die der inductiestroomen heeft, en dus de toon, dien de condensator voortbrengt en welke vrij zwak is, eene octaaf hooger staat dan het oorspronkelijke geluid. Verschillende proeven bevestigden deze beredeneerde uitkomst, bij welke proeven van eene stemvork, orgelpijp en clarinet werd gebruik gemaakt. Niet het minst opvallend was het resultaat, dat de klinker *O*, vóór de microfoon gesproken, als *A* uit den condensator te voorschijn komt, wat bij het feit, dat de kenmerkende toonen dier vocalen *O* en *A* (bes′ en bes″) juist eene octaaf verschillen, eene uitmuntende bevestiging dier redeneering geeft.

Heeft echter de condensator, door eene in den secundairen draad geplaatste batterij eene permanente lading, zoo zullen de oscilleerende electrische stroomen dien condensator niet

als vroeger beurtelings positief en negatief laden, doch de lading, beurtelings toe- of afnemende, zal steeds hetzelfde teeken kunnen behouden; dientengevolge zal de afwisselende aantrekking en afstooting der tinblaadjes de periode van de oorspronkelijke geluidgolf bezitten, geene octaafverhooging heeft meer plaats, en terwijl de aantrekking der plaatjes, wier veranderingen evenredig zijn met het spanningsverschil, krachtig is, heeft het geluid, dat de condensator voortbrengt, hetzelfde karakter als dat bij de microfoon ontwikkeld; het is bovendien sterker dan zonder permanente lading van den condensator.

Zooals wij zagen, wordt ook dit door de proeven bevestigd en kon de gemaakte redeneering als juist beschouwd worden.

Nog beter wordt de werking der ladingsbatterij tot helderheid gebracht door de eenvoudige, wiskundige ontwikkeling, die de Heer Bosscha aan den schrijver mededeelde en waardoor eene benaderde oplossing van het vraagstuk is verkregen. Daaruit volgt: zoowel de octaafverhoogde toon, wanneer de permanente lading des condensators ontbreekt, als het merkwaardige feit, dat in het algemeen het geluid, dat de condensator te hooren geeft, uit twee geluiden is zamengesteld: het vóór de microfoon ontwikkelde en zijne hoogere octaaf. De intensiteit van het eerste geluid is evenredig aan het vierkant der primitieve lading des condensators; die van de hoogere octaaf is van die lading onafhankelijk, zoodat, terwijl reeds bij eene zwakke lading de grondtoon sterker is dan de octaaf, men met eene ladingsbatterij van eenige elementen de octaaf geheel niet meer uit de klankmassa zal kunnen hooren.

Prof. Dolbear vergeleek de werking der ladingsbatterij van den condensator bij die van den permanenten magneet in den gewone telefoon. Het is wenschelijk na te gaan in hoever die vergelijking opgaat. De Heer Giltay bezigde daartoe twee telefonen: eene met permanenten magneet en eene met week ijzeren kern; hij liet vóór eene microfoon als transmitter op een stemfluitje blazen, en hield voor ieder

oor eene der telefoonen; de ongepolariseerde, met ijzeren kern, gaf een hooger of scherper geluid dan de gewone telefoon; het verschil in intensiteit was echter te groot om te beoordeelen of de toon van de eerste juist eene octaaf hooger was. Het schijnt, dat eenig permanent magnetisme, dat de ijzerkern zoo spoedig verkrijgt, voor de juiste waarneming storend werkt, want nam men in plaats van de ijzeren staaf een koker met ijzervijlsel, waarbij het remaneerend magnetisme terstond door schudden verwijderd kon worden, zoo werd de telefoon geheel onbruikbaar; geen woord was bij het spreken te verstaan; het geluid was nog zwakker dan vroeger met de ijzerkern; doch liet men nu vóór de microfoon op een stemfluitje blazen, zoo scheen het geluid van deze ongepolariseerde telefoon scherper en hooger dan dat van de gewone; soms meende men werkelijk de hoogere octaaf te onderscheiden.

Bij aanwezigheid van remaneerend magnetisme geeft de telefoon de trillingen, vóór de microfoon ontwikkeld, daardoor goed terug, omdat er wel versterking en verzwakking van magnetisme, doch geene omkeering van polariteit plaats heeft en het is de rol van den permanenten magneet, die omkeering van polariteit te voorkomen, terwijl dan tevens de krachtige werking ontstaat, die tusschen magneet en plaat vereischt wordt. Eene pas uitgegloeide ijzerkern gaf geen resultaat, doch de kortstondige nabijheid van een permanenten magneet was voldoende om die telefoon gearticuleerd geluid te doen geven.

Een opzettelijk onderzoek naar de vraag, of het voordeelig is den magneet in de ontvangende telefoon zoo sterk mogelijk te nemen, of dat het magnetisme slechts sterk genoeg moet zijn om omkeering van polariteit te voorkomen, leerde:

1°. dat voor de sterkst mogelijke werking die minimumlading onvoldoende is.

2°. dat de deugd van het geluid slechts tot op zekere hoogte met de sterkte van den magneet toeneemt, want blijkbaar zullen de telefoonstroomen des te minder invloed op het magnetisme van de ijzerkern uitoefenen, naarmate deze dichter bij haar magnetisch verzadigingspunt is.

Zoo is dan aangetoond, dat eene bepaalde polariteit zoo wel noodig is bij condensatoren als bij gewone telefoonontvangers en dat de werking der ladingsbatterij dezelfde is als die van den gewoonlijk voorkomenden permanenten magneet.

De schrijver besluit zijne verhandeling met de mededeeling van een tweetal proeven van anderen aard, die wellicht later voor toepassing van belang kunnen zijn.

Hij onderzocht of trillingen van den condensator ook electrische beweging tengevolge zouden hebben en dus in de telefoon geluid zouden geven. EDISON had zulks reeds in 1878 voorspeld, en volgens DUMONCEL heeft MAICHE op deze wijze getelefoneerd.

De Heer GILTAY liet dicht bij den condensator zingen en spreken; alles werd uitstekend gearticuleerd in de telefoon gehoord. Door het invoeren van een grooten weerstand in de geleiding, komt schrijver tot het resultaat, dat de condensator hier niet als microfoon, dat is niet door verandering van weerstand, maar door verandering in capaciteit werkt. Zoowel eene meer uitvoerige beschrijving dezer proeven, als eene nadere verklaring dier veranderde capaciteit, waarbij waarschijnlijk in eene blijvende lading der isoleerende papieren lagen de oorzaak der nu optredende electrische stroomen moet gezocht worden, ware hier zeer wenschelijk geweest. Thans is het bezwaarlijk omtrent dit deel der proeven een nader oordeel uit te spreken.

Daar dus een condensator als transmitter en als ontvanger kan dienen, schijnt het mogelijk aan *beide* einden van den geleider condensatoren te bezigen, en werkelijk gelukte dit bij twee paraffine condensatoren met 36 kleine Faure-elementen, vooral, wanneer de twee condensatoren evenwijdig in de lijn gebracht werden, zoodat hunne gelijknamige polen met elkander in direct verband stonden.

De schrijver merkt eindelijk op, dat, bij volmaakte isoleering, de batterij zou kunnen gemist worden en de eenmaal, ontvangen ladingen der condensatoren voldoende zouden zijn voor volgende telefonische gemeenschap.

De verhandeling van den Heer GILTAY vormt een goed geordend en logisch geheel, dat, met helderheid geschreven en door tal van proeven toegelicht, als eene wel gelukte poging moet beschouwd worden om onderscheidene duistere verschijnselen op dit gebied der telefonie tot klaarheid te brengen.

Uwe Commissie stelt voor, den arbeid van den Heer GILTAY in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie te doen opnemen.

Amsterdam, 23 Februari 1884.

C. H. C. GRINWIS.
J. D. VAN DER WAALS.

HET POLARISEEREN

VAN

TELEFONISCHE ONTVANGERS.

DOOR

J. W. GILTAY.

Reeds vrij lang is het bekend, dat een Leidsche flesch, zoowel bij het laden als bij het ontladen, geluid geeft. De gemakkelijkste wijze om dit verschijnsel waar te nemen, bestaat daarin, dat men de beide bekleedsels der flesch met de uiteinden van den secondairen draad van een inductieklosje verbindt. Leidt men nu door den primairen draad den stroom van een galvanisch element, en laat men het Neefsche hamertje werken, dan zal de Leidsche flesch bij de trillingen van het hamertje telkens geladen en weer ontladen worden. Het gevolg daarvan zal zijn, dat ook de flesch gaat trillen en een toon zal geven, die, hoewel niet sterk, toch duidelijk waar te nemen is.

Door een toeval ontdekte ik, dat een seleniumcel, zoowel de cilindrische van BELL als de vlakke van SHELFORD-BIDWELL *), in die omstandigheden eveneens geluid geeft. De slecht geleidende seleenlaag tusschen de metalen geleiders, speelt waarschijnlijk de rol van isolator, en de geleiders zelven die van de bekleedsels eener Leidsche flesch. De toon was zeer scherp, en tot op 30 of 40 cM. afstand te hooren. Wil men echter een sterken toon uit een conden-

*) *Nature*, Nov. 18, 1880.

.W. GILTAY. *Telefonische ontvangers.*

Fig: 1

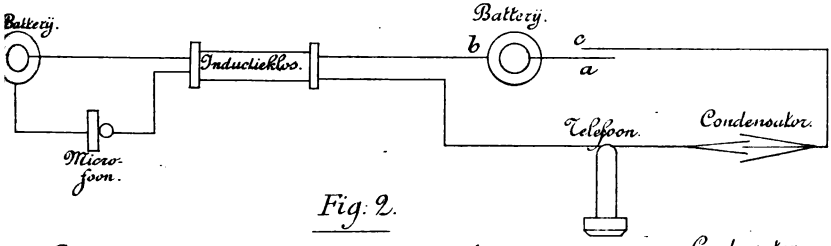


Fig: 2.

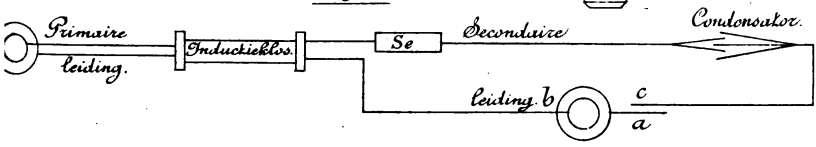


Fig: 3.

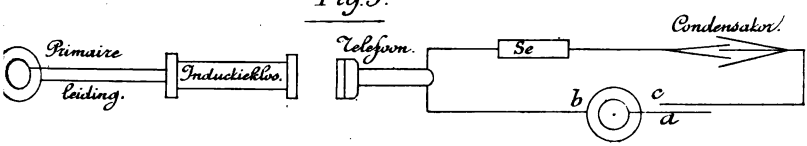


Fig: 4.

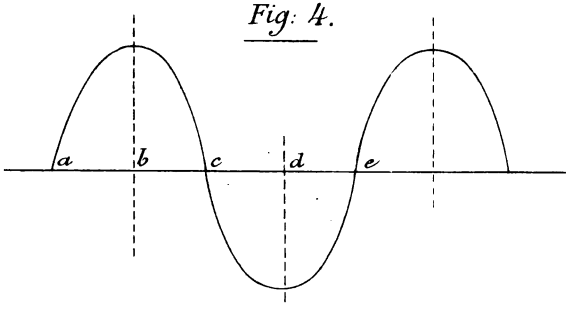


Fig: 5

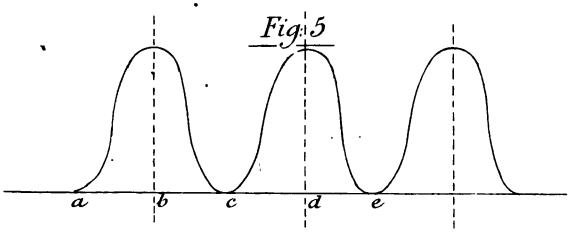
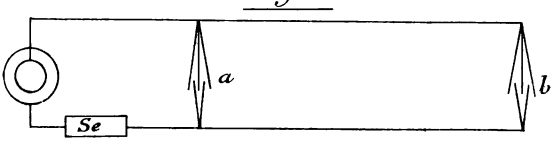


Fig: 6.



Lith. Gebr. [illegible]

sator verkrijgen, dan kan men de Leidsche flesch evenmin als de seleniumcel gebruiken. Bij beiden zijn de metalen geleiders te ver van elkaar verwijderd, en ook is de isoleerende laag, zoowel glas als selenium, te stijf.

Veel geschikter tot het doen van deze proef is een condensator, die uit afwisselende lagen bladtin en papier is samengesteld. WRIGHT en VARLEY zijn de eersten geweest, die hiermede geëxperimenteerd hebben, terwijl de proef door POLLARD en GARNIER *) zeer vereenvoudigd is. Deze laatsten maakten hun condensator uit 28 blaadjes tin van 6 bij 12 cM., die van elkaar gescheiden waren door velletjes postpapier, en om den andere de ééne helft met één klemschroef, de andere met een tweede geleidend verbonden. Deze condensator werd met de uiteinden van den secondairen draad van een inductieklosje verbonden. Voor het openen en sluiten der primaire leiding, waarin een batterij was geplaatst, diende een Reiss-transmitter, waarin echter de membraan door een metalen trilplaat, en het platinacontact door een koolcontact was vervangen. Zong men nu in dezen transmitter, dan werd, als hij goed gejusteerd was, het koolcontact met elke trilling verbroken en weer gesloten. In den secondairen draad van den klos ontstonden dus inductiestroomen, waardoor de condensator beurtelings geladen en ontladen werd. Deze geraakte daardoor in trilling, en bracht het geluid, dat de transmitter ontving, weer te voorschijn.

Om de proef van POLLARD en GARNIER na te doen, nam ik een condensator van 40 vellen bladtin van 6 bij 12 cM., die van elkaar gescheiden waren door paraffinepapier. De batterij in de primaire leiding van den inductieklos bestond uit 3 Bunsen-elementen. De primaire draad bestond uit 4 lagen van 0,045 cM. draaddikte, de secondaire uit 20 lagen van 0,016 cM. In den klos bevond zich, zooals gewoonlijk het geval is, een bundel week ijzerdraad. De Neefsche interruptor kan hierbij gemist worden, evenzoo de bij grootere inductietoestellen gebruikelijke condensator in den voet van

*) DUMONCEL, *le Téléphone*, 4e Ed. p. 23.

het instrument. Liet ik nu in den transmitter zingen, dan gaf de condensator een geluid, dat door een geheele zaal te hooren was. Ofschoon dit het muziekale gehoor niet aangenaam aandoet, blijft de proef toch zeer merkwaardig. Praktische waarde voor de telefonie verkreeg de condensator eerst door de onderzoekingen van HERZ en DUNAND. Deze laatste natuurkundige *) bracht in plaats van den Reiss-transmitter een microfoon in de primaire leiding van een inductieklos, waarvan de secondaire draadeinden verbonden werden met de bekleedsels van een condensator.

Werd er nu tegen de microfoon gesproken, dan was er in den condensator niets te hooren dan een krakend geluid. Het tikken van een wekker en het slaan van een repetitiehorloge werden gehoord, maar zeer onduidelijk en eveneens krakend.

DUNAND kwam toen op de goede gedachte, aan den condensator een permanente lading te geven, door een batterij in de secondaire leiding te plaatsen. Zoodra hij dit gedaan had, bemerkte hij dat de condensator in staat was, alle gearticuleerde geluiden nauwkeurig weer te geven. De beste resultaten verkreeg hij met een condensator, bestaande uit 36 velletjes tin van 6 bij 6 cM., gescheiden door postpapier. Met een inductieklos van 12 cM., 10 Bunsen-elementen in de secondaire, en 2 in de primaire leiding, sprak zijn condensator even goed als een Bell-telefoon. Met 15 Bunsen-elementen kon hij het gesprokene verstaan, als de condensator 90 cM. van het oor was verwijderd.

De luchtcondensator van DOLBEAR †) is in principe niets anders dan de sprekende condensator van DUNAND.

In de volgende bladzijden wensch ik de telefonische werking van den condensator aan een nadere beschouwing te onderwerpen, en vooral wil ik trachten, een verklaring te

---

*) *Comptes Rendus*, 3 Janvier 1881.

†) *Scient. American*, June 18 1881.

geven, van de schijnbaar zoo vreemde werking der ladingsbatterij. Ofschoon verschillende natuurkundigen over dit onderwerp proeven genomen hebben, heeft niemand, voor zoover mij bekend is, deze zaak tot helderheid gebracht.

De volgende proef bleek mij zeer geschikt te zijn, om den invloed der ladingsbatterij op den condensator waar te nemen.

Ik verbond een Leclanché-element en een microfoon, model HOPKINS *) met den primairen draad van een inductieklosje. In de secondaire leiding (fig. 1) bracht ik een telefoon, een batterij van 10 Bunsen-elementen en een condensator. Aan het plankje van de microfoon werd een horloge gehangen. Werd *c* met *a* verbonden, dan was de ladingsbatterij in werking, en had dus de condensator een permanente lading. Hield men nu aan het eene oor den condensator en aan het andere de telefoon, dan hoorde men in beiden zeer duidelijk het horologe tikken. Zoodra echter *c* met *b* verbonden, en dus de ladingsbatterij buiten werking gesteld werd, hield in den condensator alle geluid op, terwijl de telefoon rustig bleef doortikken †).

Wanneer wij nu overgaan tot de behandeling der vraag, welke de werking der ladingsbatterij op den condensator is, dan blijkt het, dat er tweeërlei verklaringen mogelijk zijn.

Ten eerste kan men zich denken, dat de condensator eerst door de ladingsbatterij *gevoelig* wordt gemaakt, en dat

---

*) *Scient. American,* March 19 1881. Deze microfoon is uiterst geschikt voor de proef met het tikkend horloge. De metalen trilplaat kan vervallen en het horizontaal stukje kool op een vertikaal plankje bevestigd worden. Dit toestelletje is veel beter vertrouwbaar dan het oorspronkelijke model van HUGHES, en even gevoelig en eenvoudig te maken.

†) De condensator blijft in dit geval als inductor en niet als geleider, in de lijn. Als men in een telefonische leiding zulk een condensator brengt, wordt het geluid slechts zeer weinig verzwakt. De telefoon, die ik gebruikte, had een weerstand van 240 Ohms, en de condensator een van 1240000 Ohms. Diende de condensator nu als geleider, dan zou het geluid verbazend verzwakken, zoodra hij in de lijn werd gebracht.

daarin dus de reden te vinden is, dat slechts een permanent geladen condensator de zoo zwakke telefonische stroomen kan kenbaar maken.

Maar ten tweede is het ook mogelijk, dat de condensator eerst door de ladingsbatterij in staat wordt gesteld, nauwkeurig alle trillingsvormen weer te geven. In 't eerste geval zou men dus slechts aan een quantitatieve, in 't laatste aan een qualitatieve werking moeten denken. Is de eerste verklaring juist, dan moeten alle geluiden, die de condensator maakt, door de permanente lading versterkt worden. Bovendien zou het dan mogelijk zijn, een ongeladen condensator gearticuleerd te doen spreken, mits men er slechts zeer sterke telefonische ladingen heenzond.

In geval echter de tweede verklaring juist is, dan moet de ongepolariseerde condensator ook door de sterkste telefoonstroomen nog niet tot spreken te brengen zijn. Daarentegen zal dan de condensator reeds zeer zwakke stroomen in gearticuleerd geluid kunnen omzetten, mits men een ladingsbatterij gebruikt.

Ik zal nu in de eerste plaats een paar proeven beschrijven, die licht kunnen verspreiden over de vraag, of ongearticuleerde geluiden door de ladingsbatterij versterkt worden.

Een Leclanché-element werd met de primaire leiding van een inductieklos verbonden (fig. 2) en het Neefsche hamertje in werking gebracht. In de secondaire leiding plaatste ik een batterij van 57 kleine Leclanché-elementen, een condensator en een seleniumcel van 26000 Ohms weerstand. Deze laatste dient alleen, om de vermeerdering van den weerstand der secondaire leiding, door het inbrengen der ladingsbatterij, te kunnen verwaarloozen. Verbond ik *c* met *a*, dan was de condensator permanent geladen; verbond ik daarentegen *c* met *b*, dan was de ladingsbatterij buiten werking. Het bleek, dat de condensator een veel sterker toon gaf als *c* met *a*, dan wanneer *c* met *b* verbonden was. Derhalve wordt het geluid door de ladingsbatterij versterkt.

Op eenigszins andere wijze heb ik hetzelfde feit door de volgende proef bewezen.

De primaire leiding van den inductieklos (fig. 3) verbond ik weer met een Leclanché-element en liet het hamertje werken. De secondaire leiding liet ik open. Eenige centimeters van den klos verwijderd, werd een telefoon neergelegd, zoodat de magneet zich in het verlengde van de as van den inductieklos bevond. Deze telefoon was verbonden met de batterij, de seleencel en den condensator van de vorige proef. Er konden bij deze inrichting slechts zeer zwakke stroomen in de telefoon geïnduceerd worden, die zich naar den condensator begaven.

Het bleek toen, dat er in den ongeladen condensator niets hoegenaamd te hooren was, terwijl deze na het in werking stellen der batterij een vrij sterken toon gaf.

Nadat het aldus bewezen is, dat de condensator door de ladingsbatterij voor zwakke stroomen gevoeliger wordt gemaakt, willen wij onderzoeken, of een ongeladen condensator ook gearticuleerd geluid kan geven, als er zeer sterke telefonische ladingen heen worden gezonden. Blijkt het dat dit wel het geval is, dan dient de ladingsbatterij uitsluitend om den condensator gevoeliger te maken, en heeft zij op den vorm der trillingen geen invloed.

Ten einde deze vraag te beantwoorden, nam ik een Adermicrofoon, die ik met 3 Bunsen-elementen en den primairen draad van het inductieklosje verbond. Ten bewijze dat ik met dezen toestel zeer sterke telefonische stroomen verkreeg, diene, dat een Siemens-telefoon, met de secondaire leiding van den inductieklos verbonden, door een geheele zaal gehoord en verstaan werd. Daartoe was het noodig, dat men met luider stemme, en dicht bij de trilplaat van de Adermicrofoon sprak, en de telefoon van een bordpapieren trechter voorzien was, zooals dat bij de fonograaf gebruikelijk is *).

---

*) Ik heb op deze wijze een telefoon op het bladtin, dat om een fonograaftrommel was gewikkeld, zeer duidelijke trillingen doen opschrijven. Omtrent dit onderwerp hoop ik nog nadere proefnemingen te doen. Op de mogelijkheid van zulk een „tele-fonograaf" is reeds door Edison gewezen (*Engineer* 1878, bd. 46, p. 425). Of de proef echter door hem gedaan is, is mij niet bekend.

Deze inductiestroomen voerde ik, in plaats van naar d Siemens-telefoon. naar een ongeladen condensator. Woorden, tegen de microfoon gesproken, werden gehoord, doch niet verstaan in den condensator. Daar het geluid sterk genoeg was, om, ware het gearticuleerd geweest, verstaan te worden, zoo leid ik uit deze proef af, dat de condensator zonder ladingsbatterij niet in staat is, gearticuleerde geluiden voort te brengen. Een melodie, luid en dicht bij de trilplaat der microfoon gefloten, werd gehoord en herkend; dit geluid was echter uiterst zwak.

De veronderstelling, dat de ladingsbatterij den condensator uitsluitend gevoeliger maakt, maar niets met den vorm der trillingen uitstaande heeft, blijkt dus onjuist te zijn. Deze stelt den condensator eerst in staat alle trillingen nauwkeurig weer te geven, en versterkt bovendien het geluid, zoowel gearticuleerd als niet-gearticuleerd.

Om te bepalen hoe sterk de ladingsbatterij ongeveer dient te zijn, ten einde den condensator gearticuleerd te doen spreken, deed ik de volgende proeven, waartoe weer de Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen gebruikt werd. De in de secondaire leiding opgewekte stroomen werden naar den hierboven beschreven condensator gevoerd. Bij de eerste proef was de condensator zonder permanente lading, bij de tweede werd er een Leclanché-element in de secondaire leiding gebracht, en bij de derde proef dienden twee Leclanché-elementen.

De resultaten dezer proeven waren de volgende:

1e proef. Condensator zonder ladingsbatterij. Van spreken is geen woord te verstaan, men hoort slechts een sterk geraas. De vijf klinkers zijn niet te onderscheiden, alleen is de *o* het sterkst, en zijn de *i* en de *u* het zwakst.

2e proef. Condensator geladen door een Leclanché-element. De vijf klinkers zijn nu te onderscheiden, spreken is vrij goed te verstaan.

3e proef. Condensator geladen door twee Leclanché-elementen. Men kan alles goed onderscheiden en verstaan.

Zooals men hieruit ziet, is één Leclanché-element bijna voldoende, om gerticuleerd geluid mogelijk te maken.

Dat door een permanente lading van den condensator het voortgebrachte geluid versterkt wordt, is licht te begrijpen. Niet zoo gemakkelijk echter laat zich de vraag beantwoorden, op welke wijze eerst de ladingsbatterij den condensator in staat stelt den vorm der trillingen nauwkeurig weer te geven, en dus gearticuleerde geluiden voort te brengen.

De literatuur over dit onderwerp is zeer beperkt, althans datgene, wat de vermelding waard is.

Dunand zelf heeft, voor zoo ver mij bekend is, in het geheel geen verklaring van het door hem ontdekte feit gegeven.

Dolbear *) laat zich bij de beschrijving van zijn luchtcondensator zeer voorzichtig en onbepaald over de ladingsbatterij uit. Men kan zelfs uit zijn stuk niet opmaken, of hij een dergelijke batterij alleen wenschelijk dan wel noodzakelijk acht. Hij zegt: »if one of the terminals of a receiver be charged in any way, the reaction between the plates will be stronger than it will be without". Iets verder: »the electrically charged terminals in this system acting in a way analogous to the permanent magnets in the magnetic system".

Deze onduidelijk uitgesproken analogie tusschen de beteekenis van de ladingsbatterij bij den condensator, en die van den permanenten magneet bij de Bell-telefoon, kan men bezwaarlijk een verklaring noemen.

In het reeds genoemde werk van Dumoncel vindt men deze overeenkomst ook hier en daar aangeduid (blz. 213 en vgl.). Een eenigszins samenhangende beschouwing zal men er echter te vergeefs zoeken.

In de volgende regelen hoop ik aan te toonen, op welke wijze de ladingsbatterij op den vorm der trillingen werkt.

Denken wij ons daartoe een microfoon en een batterij, met den primairen draad van een inductieklos verbonden, en laat de secondaire draad gesloten zijn. Indien er nu vóór

---

*) *Scient. American.* June 18. 1881.

de microfoon een enkelvoudige toon wordt voortgebracht, dan zal er in den dunnen draad een inductiestroom ontstaan, die door de in fig. 4 geschetste kromme kan worden voorgesteld. Op de lijn der abscissen zijn de tijden opgeteekend, de ordinaten duiden de sterkte van den stroom aan Wordt nu de secondaire leiding geopend, en worden de beide uiteinden met de bekleedsels van een condensator verbonden, dan zal deze beurtelings geladen en ontladen worden. De kromme van fig. 4, die zooeven de wording der inductiestroomen voorstelde, zal nu een beeld geven van de veranderingen van grootte en teeken der ladingen, die zich naar den condensator begeven.

Zal nu de condensator, onder den invloed dezer alterneerende ladingen, hetzelfde geluid geven, dat bij de microfoon is voortgebracht, dan moet ook zijn trillingsvorm overeenkomen met de kromme van fig. 4. Wanneer wij echter de beweging, die de condensator maakt, wat nauwkeuriger nagaan, dan zullen wij zien, dat de tinnen blaadjes zich volgens een geheel andere wet bewegen. Gemakshalve zal ik daarbij, wanneer de even bekleedsels +, de oneven — geladen zijn, de lading positief, en in het omgekeerde geval negatief noemen.

Op het tijdstip *a* (fig. 4) is de lading = 0, dus op dat oogenblik liggen de bekleedsels van den condensator in hun evenwichtspunt.

Van *a* tot *b* stijgt de lading van 0 tot haar positief maximum, de bekleedsels bewegen zich gedurende dien tijd naar elkaar toe.

Van *b* tot *c* daalt de lading van haar positief maximum tot op 0, de blaadjes bewegen zich van elkaar af, naar hun evenwichtspunt terug.

Van *c* tot *d* vermeerdert de lading van 0 tot haar negatief maximum, *de blaadjes bewegen zich weer naar elkaar toe.*

Van *d* tot *e* vermindert de lading van haar negatief maximum tot op 0, de blaadjes bewegen zich van elkaar af, naar hun evenwichtsstand terug.

Volgens deze beschouwing zou fig. 5 ongeveer een beeld

geven van de beweging van den condensator, overeenkomend met de in fig. 4 voorgestelde wisseling der ladingen.

Ofschoon wij de bewegingskrommen van den condensator en de microfoon nog niet met mathematische juistheid bepaald hebben, is er toch, wat de snelheid van beweging betreft, een eenvoudige verhouding tusschen beiden op te merken. Bij vergelijking toch van fig. 4 met fig. 5 ziet men, dat de condensator blaadjes twee geheele trillingen volbrengen, in den tijd dat de microfoon er slechts één maakt.

Men kan dus verwachten, dat een toon, die voor de microfoon wordt voortgebracht, een octaaf hooger door den condensator zal worden teruggegeven. Of die octaaf hetzelfde timbre zal bezitten als de grondtoon, willen wij voorloopig in 't midden laten.

Werkelijk geeft de ongeladen condensator alle tonen een octaaf hooger weer, wat ik door een opzettelijk daartoe ingerichte proef heb bewezen.

Men zou kunnen meenen, dat ik reeds bij vroeger beschreven proeven met den ongeladen condensator, deze verhooging van toon moest waargenomen hebben. Dit is echter niet het geval. De tonen toch, die men uit den condensator verkrijgt, wanneer de ladingsbatterij beurtelings in en uit de leiding wordt gebracht, verschillen zeer in sterkte, en dit maakt het bizonder moeilijk, het verschil in hoogte met zekerheid te hooren. Daarom was het noodig, een inrichting te maken, waarbij men, den condensator steeds aan het oor houdend, de ladingsbatterij naar willekeur oogenblikkelijk in of buiten de leiding kon brengen. Daardoor volgen de beide tonen onmiddellijk op elkaar, en werd de vergelijking eerst mogelijk. In de primaire leiding van den inductie-klos bracht ik 3 Bunsen-elementen en een Ader-microfoon. In de secondaire plaatste ik een condensator, een batterij van 6 Leclanché-elementen en een drukknop. Deze laatste was zoodanig ingericht, dat de batterij geheel buiten de leiding werd gebracht, zoodra er op den knop werd gedrukt. In dat geval was dus de condensator ongepolariseerd; liet men den knop daarentegen los, dan was de condensator door 6 Leclanché-elementen geladen.

Vlak bij de trilplaat der Ader-microfoon werd nu op een stemfluitje de orchest-*a* geblazen. Wanneer men aan den geladen condensator luisterde, hoorde men de *a* zeer duidelijk. Zoodra echter de knop neer werd gedrukt, en dus de ladingsbatterij buiten werking gesteld, werd de toon plotseling zeer veel zwakker, maar bovendien een octaaf hooger.

Om de proef ook voor een enkelvoudigen toon te doen, nam ik een stemvork, die dicht voor de microfoon werd aangestreken. Het geluid op deze wijze, zelfs uit zeer groote stemvorken verkregen, bleek echter te zwak te zijn; zonder ladingsbatterij hoorde men niets. Wanneer ik de stemvork in trilling bracht door er tegen te slaan, gelukte de proef wel, dan echter heeft men geen enkelvoudig geluid meer. Ook een gesloten orgelpijp gaf het gewenschte resultaat. Zeer geschikt voor deze proef is een clarinet, mits er niet al te sterk op wordt geblazen, daar er dan contact-verbrekingen in de microfoon plaats hebben, waardoor het geluid rammelend wordt.

Ik heb deze proeven herhaaldelijk gedaan, en verschillende personen met een geoefend muziekaal gehoor het verschil in toonhoogte laten hooren; steeds werd dit door hen op een octaaf geschat. Een lastig verschijnsel bij deze proef is somtijds het voorkomen van een toon, die in de microfoon ontstaat; door af en toe eens op de trilplaat te kloppen, wordt dit gebrek echter gewoonlijk spoedig verholpen.

Wij weten dus nu, dat de ongepolariseerde condensator alle tonen een octaaf hooger weergeeft. Of er nu bovendien nog verandering van timbre plaats heeft, dan wel, of een enkelvoudige trilling der microfoon ook een enkelvoudig geluid in den condensator ten gevolge heeft, willen wij voorloopig onbeslist laten. Zelfs in dit laatste, gunstigste, geval, zal het echter nog niet mogelijk zijn, gearticuleerd geluid uit den condensator te verkrijgen. De oorzaak daarvan laat zich gemakkelijk begrijpen, wanneer men bedenkt, dat de klinkers, volgens Helmholtz, zich van elkaar onderscheiden door kenmerkende, constante bijtonen. Wanneer

men bijv. den klinker *A* uitspreekt, onverschillig in welke toonhoogte, dan zal daarin steeds de toon bes'' voorkomen, die nog door het resonneeren der mondholte versterkt wordt. Spreekt men nu voor de microfoon een *A* uit, dan zullen alle tonen, waaruit die klank bestaat, en dus ook de kenmerkende bes'', een octaaf hooger uit den ongeladen condensator te voorschijn komen. Het gevolg daarvan zal zijn, dat het geluid, dat men uit den condensator hoort, geheel het karakter van den *A* klinker zal verloren hebben.

Dat deze bewering juist is, wordt door de volgende proef bewezen:

Een Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen wordt met den primairen draad van een inductieklos verbonden. In de secondaire leiding breng ik een condensator, een batterij van 3 Leclanché-elementen, en een drukknop. De laatste is zoodanig verbonden, dat de condensator slechts dan door de batterij geladen is, als de knop wordt neergedrukt. Spreekt men nu den klinker *O* voor de microfoon uit, dan zal men dien zeer duidelijk in den condensator hooren, als de knop neergedrukt is. Laat men dezen echter los, waardoor de condensator zijn permanente lading verliest, dan hoort men duidelijk den klinker *A*. Dit verschijnsel is een gevolg van het feit, dat de kenmerkende tonen der klinkers *O* en *A* (bes' en bes'') juist een octaaf verschillen *).

De medeklinkers kan men, ondanks deze toonverhooging, goed onderscheiden, zoodat bijv. obrocodobro voor de microfoon gezegd, zeer duidelijk als abracadabra in den ongeladen condensator te hooren is.

Nadat ik aldus duidelijk gemaakt heb, waarom een ongeladen condensator niet als telefonische ontvanger kan dienen, wil ik thans nagaan, welke rol de ladingsbatterij speelt.

Zij fig. 4 weer een beeld van de veranderingen in grootte en teeken der telefonische ladingen, die naar den condensator

---

*) Helmholtz *die Lehre von den Tonempfindungen*, 3e Ausgabe, S. 172.

gezonden worden; laat ons dan nagaan, hoe deze zich zal bewegen, als hij bovendien een permanente lading L heeft.

De lading op het oogenblik a (fig. 4) is L, de blaadjes zijn in rust.

Van a tot b groeit de lading van L tot haar maximum, de blaadjes zullen zich dus dichter naar elkaar toe bewegen.

Van b tot c vermindert de lading van haar maximum tot op L, de blaadjes bewegen zich dus weer van elkaar.

Van c tot d vermindert de lading van L tot op haar minimum, wijl de telefonische lading, die nu aankomt, omgekeerd van teeken is als de permanente. De blaadjes bewegen zich dientengevolge nog verder uit elkaar.

Van d tot e groeit de lading van haar minimum tot op L, de blaadjes bewegen zich weer naar hun evenwichtsstand.

De geladen condensator volgt dus in zijn beweging ongeveer de in fig. 4 geschetste kromme; hij geeft dus de trillingen van de microfoon geheel met dezelfde snelheid weer en dat wel, zooals uit de bovenstaande beschouwing blijkt, omdat door de ladingsbatterij de omkeering van polariteit verhinderd wordt. De permanente lading behoeft daartoe niet zeer groot te zijn; wanneer zij slechts grooter is, dan de grootste telefonische lading, die den condensator bereikt, dan zal deze laatste reeds geschikt zijn tot het geven van gearticuleerd geluid. Wij zagen dan ook reeds vroeger, dat de zwakke lading van een enkel Leclanché-element bijna voldoende is voor articulatie.

De geladen condensator brengt het gesproken woord op uitstekende wijze te voorschijn, door de passiviteit der blaadjes tin wordt het geluid veel natuurlijker teruggegeven dan door een Bell-telefoon.

Dat de ladingsbatterij bovendien, zooals wij zagen, den condensator gevoeliger maakt, wordt duidelijk, als men bedenkt, dat de aantrekkende kracht evenredig is aan het vierkant van het potentiaal-verschil. Wordt een der bekleedsels met de aarde verbonden, en is het potentiaal van het andere $= V$, dan is de aantrekking K:

$$K = V^2 \text{ const.}$$

$$dK = 2\ V . d\ V . \text{ const.}$$

Hieruit ziet men, dat de verandering der aantrekking, ontstaan door de verandering van potentiaal, evenredig is aan het oorspronkelijk potentiaal der niet afgeleide bekleeding. En daar die verandering van aantrekking de oorzaak der geluidgevende beweging is, zal ook de sterkte van het geluid aangroeien met het oorspronkelijk potentiaal.

Ofschoon wij in het bovenstaande de bewegingskrommen van den geladen en den ongeladen condensator niet met wiskunstige nauwkeurigheid bepaald hebben, bleek uit de overeenstemming tusschen de beredeneerde resultaten en de proeven toch, dat de beschouwingen omtrent de werking der ladingsbatterij geheel juist waren.

Om echter den juisten vorm dier bewegingskrommen te bepalen, dient de volgende mathematische ontwikkeling, die ik aan den Hoogleeraar Bosscha verschuldigd ben.

Wanneer er voor de microfoon, die met den primairen draad van den inductieklos verbonden is, een enkelvoudig geluid wordt voortgebracht, dan zal de sterkte der in den dunnen draad opgewekte inductiestroomen door een sinusoïde kunnen worden voorgesteld. Wordt er met den secondairen draad een condensator verbonden, die ook nog een permanente lading a heeft, dan zal de grootte der lading op elk oogenblik kunnen worden gevonden uit de uitdrukking $a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}$, waar T den trillingstijd voorstelt van den toon, die voor de microfoon is voortgebracht. Wijl de aantrekking K der bekleedsels evenredig is aan het vierkant der lading, zoo is:

$$K = \left(a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2 = a^2 + 2ab \sin 2\pi \frac{t}{T} + b^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Is $a = 0$, dus heeft de condensator geen permanente lading, dan is:

$$K_{\mathrm{I}} = b^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daar, bij kleine amplituden, de uitslag evenredig kan genomen worden aan de aantrekking op dat oogenblik, zoo stelt deze laatste uitdrukking tevens de bewegingskromme voor van den ongeladen condensator; zij is dus de vergelijking van de kromme, die wij in fig. 5 teekenden. Vervangen wij

$$\sin^2 2\pi \frac{t}{T} \text{ door } \frac{1 - \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}T}}{2},$$

dan is K_{I}:

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}T}.$$

Hieruit blijkt, dat de kromme van fig. 5 kan ontbonden worden in een sinusoïde van den trillingstijd $\frac{1}{2}T$, en een rechte lijn, op den afstand $\frac{b^2}{2}$ evenwijdig aan de as loopend. Dit wil dus zeggen, dat de ongeladen condensator een voor de microfoon voortgebrachten, enkelvoudigen toon, niet alleen een octaaf hooger, maar ook weer als enkelvoudigen toon zal teruggeven.

Zetten wij de laatstgevonden uitdrukking voor K_{I} in den vorm, dien wij voor K ontwikkelden, in, dan is:

$$K = a^2 + 2ab \sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}T}.$$

Deze uitdrukking zegt ons, dat de bewegingskromme van den *geladen* condensator kan worden ontbonden in een rechte lijn, op een afstand $a^2 + \frac{b^2}{2}$ evenwijdig aan de as loopend, en in twee sinusoïden, de eene van de periode T, de andere van $\frac{1}{2}T$. Behalve het enkelvoudig geluid, voor de microfoon voortgebracht, zal er dus uit den condensator ook nog de hoogere octaaf van dien toon te hooren zijn.

Dit resultaat is geheel in overeenstemming met mijn proeven. In de primaire leiding van den inductieklos had

ik de Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen geplaatst. Met de secondaire leiding was de condensator verbonden, en, door middel van 2 drukknoppen, kon ik dezen naar willekeur met een of twee Leclanché-elementen laden. Voor de microfoon liet ik op een stemfluitje de orchest-*a* blazen. Het bleek nu, dat ik, behalve de *a*, ook nog de hoogere octaaf, ofschoon zwak, uit den condensator hoorde, wanneer deze met één Leclanché-element geladen was. Met een lading van twee Leclanché-elementen, kwam die octaaf eveneens, ofschoon zwakker, te voorschijn.

Volgens de formule, die wij voor K vonden, verhouden zich de amplituden der beide tonen als $2\,a\,b : \frac{b^2}{2}$, de verhouding der intensiteiten is dus als $4\,a^2\,b^2 : \frac{b^4}{4}$ of $16\,a^2 : b^2$. De grondtoon zal dus reeds even sterk als de octaaf zijn, als $4\,a = b$ is. Daaruit volgt, dat reeds bij een zwakke permanente lading de grondtoon sterker zal zijn dan de octaaf; met een ladingsbatterij van eenige elementen, zal men de octaaf geheel niet meer uit de klankmassa kunnen hooren. De condensator zal dus, bij een voldoende permanente lading, de kromme van fig. 4 geheel in zijn beweging volgen.

Zooals wij zagen, wordt er in het geciteerde stuk van Dolbear gezinspeeld op de analogie tusschen de werking der ladingsbatterij bij den condensator, en die van den permanenten magneet bij de telefoon. Navez *) is, voor zoover mij bekend is, de eenige, die getracht heeft een verklaring te geven van de rol, die de permanente magneet in de *ontvangende* telefoon speelt. Hij beweert, dat er bij een telefoon zonder magneet omkeering van polariteit plaats heeft, zoodra er een stroom aankomt, die sterker is dan de onmiddellijk voorafgaande, d. w. z., die aan een grootere beweging der

*) *Bulletin de l'Acad. Royale de Belgique* 1878, T. 45, p. 423.

trilplaat dan de voorafgaande, zijn ontstaan te danken heeft. Hij zegt daaromtrent het volgende.

»Supposons deux Bell conjugués, celui qui remplit les fonctions de récepteur n'étant pas muni d'un aimant permanent. La plaque de l'envoyeur fait un mouvement, et le courant d'induction produit, activant l'électro-aimant du récepteur, détermine dans sa plaque un mouvement correspondant. La plaque de l'envoyeur fait un autre mouvement, plus grand que le précédent, et envoie en conséquence dans la bobine un courant, qui doit nécessairement renverser les poles de l'électro-aimant et déterminer deux mouvements en sens inverse de la plaque réceptrice pour un mouvement de la plaque de l'envoyeur."

Ofschoon het hier gezegde zonder twijfel waar is, bevat het toch niet de geheele waarheid. Het is namelijk volstrekt niet noodig dat een stroom sterker zij dan zijn voorganger, om omkeering van polariteit te bewerken, want voor dat de tweede stroom komt, heeft de eerste reeds opgehouden, en daarmede is alle polariteit van den ijzerkern verdwenen, waarbij ik natuurlijk het uiterst geringe remanente magnetisme, dat de ijzerkern door de telefoonstroomen zal hebben verkregen, buiten rekening laat. Er zal dus reeds bij den tweeden stroom omkeering van polariteit ontstaan, al is deze slechts even sterk of zelfs zwakker dan de eerste. De volgende redeneering zal dit nog duidelijker maken:

Men neme aan dat wij in de secondaire leiding van onzen inductieklos een telefoon zonder permanenten magneet brengen, terwijl fig. 4, weer een beeld geeft van de in die leiding opgewekte inductiestroomen. Laat ons dan nagaan, welke beweging de telefoon-trilplaat zal maken, onder den invloed dier stroomen.

Op het oogenblik *a* (fig. 4) gaat er geen stroom door het spoeltje, de ijzerkern is dus niet magnetisch, de trilplaat wordt niet aangetrokken.

Van *a* tot *b* gaat er een steeds sterker wordende stroom door het spoeltje. Het uiteinde van de ijzerkern, dat zich het dichtst, bij de trilplaat bevindt, wordt bijv. Noordpool.

De trilplaat wordt aangetrokken en beweegt zich naar de ijzerkern toe.

Van *b* tot *c* verzwakt de hierboven genoemde stroom, tot hij in $c = 0$ is De Noordpool verdwijnt, de trilplaat beweegt zich van de ijzerkern af.

Van *c* tot *d* gaat een steeds toenemende stroom, omgekeerd gericht als die van *a* tot *b*, door het spoeltje. Het uiteinde van de ijzerkern het dichtst bij de trilplaat wordt Zuidpool. *De trilplaat wordt weer aangetrokken.*

Van *d* tot *e* verzwakt de hierboven genoemde stroom, tot hij in $c = 0$ is. De Zuidpool verdwijnt weer en de trilplaat verwijdert zich van de ijzerkern.

Men ziet dus dat de trilplaat ongeveer dezelfde beweging maakt, als de blaadjes van den ongepolariseerden condensator. Werkelijk heeft dan ook het geluid, dat uit den laatste komt, en dat, hetwelk de ongepolariseerde telefoon voortbrengt, hoewel van geen van beiden iets te verstaan is, zeer veel overeenkomst met elkaar. Om met zulk een telefoon geluid te krijgen, doet men het best, als transmitter een Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen te gebruiken, men verkrijgt daardoor een zeer goed hoorbaar, hoewel niet gearticuleerd, geluid. Dat Navez uit een telefoon zonder magneet in het geheel geen geluid verkreeg, is zonder twijfel daaraan toe te schrijven, dat hij met te zwakke telefoonstroomen werkte.

Evenals van den ongeladen condensator, kan men van de telefoon zonder magneet verwachten, dat zij het geluid een octaaf hooger zal weergeven. Ik heb verschillende proeven gedaan, om die octaaf te verkrijgen, doch met twijfelachtig resultaat. Daartoe gebruikte ik een telefoon zonder magneet, en met zorgvuldig week gemaakte ijzerkern, en bracht deze, achter een gewone telefoon, in de secondaire leiding van een inductieklos. Met de primaire leiding werd een Blake-microfoon en een Leclanché-element verbonden. Aan het eene oor hield ik de ongepolariseerde, en aan het andere de gewone telefoon, en liet voor de microfoon op een stemfluitje blazen. Daarbij scheen het mij wel toe, dat de ongepolariseerde telefoon een hooger of scherper geluid gaf

dan de gewone telefoon, maar toch durf ik niet met zekerheid zeggen, dat er juist een octaaf verschil tusschen die twee geluiden bestond. Het verschil in intensiteit was te groot, om met volkomen beslistheid te kunnen oordeelen, en dat wel, niettegenstaande ik de gewone telefoon van zeer weinig windingen had voorzien, zoodat zij slechts een weerstand van 13 Ohms bezat, terwijl die van de ongepolariseerde telefoon 145 Ohms bedroeg.

Het scheen mij echter bij deze proeven toe, dat de ijzerkern hoe langer hoe meer remanent magnetisme verkreeg, 't zij door de werking van het aardmagnetisme, of wel door de sterke inductiestroomen, die soms, bij het geheel verbreken van het microfonisch contact, ontstonden. Toen ik de Blake-microfoon verving door een Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen, kon ik zelfs in de ongepolariseerde telefoon, ofschoon zeer zwak, reeds alles, wat voor de microfoon werd gesproken, verstaan; wel een bewijs, dat er reeds vrij wat remanent magnetisme in het spel was. Om dit bezwaar te vermijden, nam ik de ijzerkern uit de telefoon, en verving die door een kartonnen kokertje, bijna geheel met ijzervijlsel gevuld. Mocht hierin remanent magnetisme ontstaan, dan kon ik dat onmiddellijk doen verdwijnen, door de telefoon even te schudden. Dit bleek een afdoend middel te zijn, want er was nu geen woord meer uit de telefoon te verstaan. Zoo liet ik bijv. iemand bij de Ader-microfoon ons volkslied opzeggen, maar kon dit in de telefoon zelfs niet volgen. Bovendien was het geluid uiterst zwak, nog zwakker dan vroeger met de ijzerkern.

Toen ik nu voor de Ader- of Blake-microfoon op het stemfluitje liet blazen, scheen al weer het geluid van de ongepolariseerde telefoon mij scherper en hooger toe dan dat van de gewone. Soms zelfs meende ik werkelijk de hoogere octaaf te onderscheiden, maar ook bij deze inrichting maakte het groote verschil in intensiteit, dat het niet mogelijk was, met voldoende zekerheid te oordeelen.

Wanneer daarentegen de telefoon permanent gemagnetiseerd is, dan is het duidelijk, dat zij zeer juist de trillingen, die voor de microfoon zijn voortgebracht, kan weergeven,

daar er dan slechts verzwakking en versterking van magnetisme plaats heeft, terwijl omkeering van polariteit, bij een voldoende sterkte van den permanenten magneet, geheel vermeden is. Met andere woorden: de magneet dient slechts om omkeering van polariteit te verhinderen. Daarom is een zeer zwakke permanente magnetiseering reeds voldoende, om een telefoon gearticuleerd te doen spreken.

Dit bleek dan ook reeds genoegzaam uit de proef met de telefoon met weeke ijzerkern, die ik zooeven vermeldde. Ten overvloede deed ik nog een andere proef, waarbij ik eerst een telefoon met versch gegloeide ijzerkern, en zonder magneet, aan het oor bracht, zonder iets te kunnen verstaan, van hetgeen er tegen de microfoon gesproken werd. Nadat ik slechts een oogenblik een permanenten magneet bij de kern had gehouden, had deze laatste reeds remanent magnetisme genoeg om de telefoon gearticuleerd, ofschoon zwak, te doen spreken.

In verband met het voorgaande, doet zich nu de vraag voor, of het voordeelig is, den polariseerenden magneet in de ontvangende telefoon zoo sterk mogelijk te nemen, of dat men dien maar juist sterk genoeg moet maken, om omkeering van polariteit te voorkomen?

Aan het kiezen van een zeer sterken magneet is, theoretisch gesproken, zoowel een voordeel als een nadeel verbonden. Het voordeel ontstaat daaruit, dat een sterke magneet ook de trilplaat sterk zal magnetiseeren, terwijl de verandering van aantrekking evenredig is aan het magnetisme der trilplaat. Zij m het magnetisme van den staalmagneet en m_{I} dat der trilplaat, dan is de aantrekking:

$$K = C\, m\, m_{\mathrm{I}}.$$

Nemen wij aan, dat de trilplaat verzadigd, en dus m_{I} constant is, dan is:

$$d\,K = C\, m_{\mathrm{I}}\, d\, m.$$

Het nadeel, dat echter aan de keuze van een zeer sterken

magneet is verbonden, bestaat daarin, dat de telefoonstroomen des te minder invloed op het magnetisme van de ijzerkern zullen hebben, naarmate deze dichter bij haar magnetisch verzadigingspunt is. Was de ijzerkern volkomen verzadigd, dan zouden zij in 't geheel niets uitwerken, en dus zou dm, en bijgevolg ook $dK = 0$ zijn.

De proef zal nu uit moeten maken, welke inrichting het gunstigst is voor een maximale werking.

Tot dat doel vervaardigde ik een telefoon, waarin de permanente magneet door een rechten elektromagneet vervangen was. Deze telefoon had dus twee draadklossen: het gewone klosje voor de telefonische stroomen, aan dat uiteinde der staaf, dat zich bij de trilplaat bevond, en verder een langen klos, met dikken draad ontwikkeld, over het overige deel der staaf.

De kleine klos dier telefoon bracht ik nu met een Blake-microfoon en een Leclanché-element in één leiding, zonder een inductieklos te gebruiken. De groote klos werd voorloopig buiten werking gelaten. Omkeering van polariteit was op deze wijze niet mogelijk, de telefoon sprak dan ook zeer goed verstaanbaar.

Nu verbond ik een Bunsen-element met den langen klos, die op de ijzeren staaf geschoven was: het geluid werd daardoor onmiddelijk veel sterker.

Toen ik daarna voor den elektromagneet 4 Bunsen-elementen gebruikte, bleef het geluid even sterk als met een enkel. De magneet droeg met een Bunsen-element 55 gram, met 4 elementen 100 gram, bij welke metingen een gewone telefoon-trilplaat als anker diende. Zonder de Bunsen-batterij, dus alleen door het Leclanché-element, en met de microfoon in de leiding, was de ijzerkern te zwak magnetisch om de enkele trilplaat, zonder belasting, te dragen.

Ofschoon deze meting, wat de grenswaarden aangaat, op geen groote nauwkeurigheid aanspraak mag maken, bewijst zij toch:

1°. Dat het, om de sterkst mogelijke werking te verkrijgen, niet voldoende is, als men den magneet zoo zwak neemt, dat hij slechts omkeering van polariteit verhindert.

2°. Dat de sterkte van het geluid slechts tot op een zekere hoogte toeneemt met de sterkte van den magneet.

Dezelfde mathematische beschouwing, die ons den juisten vorm der condensator-beweging leerde kennen, kan toegepast worden tot het vinden van de beweging der telefoon-trilplaat. Wanneer P het permanent magnetisme van de ijzerkern is, en μI het magnetisme, dat door een stroom I, die door den klos loopt, in de ijzerkern wordt opgewekt, dan is de aantrekking:

$$K = C(P + \mu I)^2.$$

Is het geluid, voor de microfoon voortgebracht, enkelvoudig, dan verandert I naar den vorm $a \sin 2\pi \frac{t}{T}$, dus:

$$K = C\left(P + \mu a \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2.$$

Deze vorm is geheel overeenkomend met dien, welken wij voor de beweging des condensators vonden. Dezelfde resultaten, die wij er toen uit afleidden, zullen wij dus ook voor de beweging der telefoon-trilplaat verkrijgen.

Ik meen in het bovenstaande aangetoond te hebben, waarom polarisatie noodig is, bij condensatoren zoowel als bij telefonen. Ofschoon de vraag, die ik bij het begin van dit stuk gesteld heb, hiermede beantwoord is, wil ik hier nog een paar proeven, betrekking hebbende op de telefonische werking der condensatoren, bijvoegen.

Toen ik een telefoon, condensator en ladingsbatterij van 10 Bunsen-elementen in één lijn had, kwam ik op de gedachte, eens te beproeven, of trilling van den condensator ook electriciteits-beweging ten gevolge zou hebben, en dus in de telefoon eenig geluid zou geven. Daartoe liet ik zeer dicht bij den condensator zingen en spreken, en het bleek

mij, dat alles uitstekend gearticuleerd in de telefoon gehoord werd, ofschoon het geluid niet sterk was. Met die inrichting was het dus mogelijk, heen en weer te spreken.

De vraag was nu, welke is de oorzaak van dit verschijnsel? Werkt de condensator als microfoon, of is het verandering van capaciteit, waarmede men te doen heeft? Deze vraag was op zeer eenvoudige wijze te beantwoorden.

Daartoe bracht ik den condensator met een batterij en een telefoon in één leiding. De geleidingsweerstand van den condensator was 1248000 Ohms, die der telefoon 240 Ohms; de weerstand der overige geleiding was zoo gering, dat zij kon verwaarloosd worden. Nu plaatste ik op den condensator een klein speeldoosje, en hoorde, in een ander vertrek, zeer duidelijk de melodie in de telefoon.

Werkt daarbij de condensator als microfoon, dan zullen de stroomen, die ik in de telefoon hoor, *door den condensator* loopen: de weerstand der leiding, die door die stroomen wordt doorloopen, is dan 1248240 Ohms. Is echter verandering van capaciteit de oorzaak der werking, dan gaan de telefonische stroomen *niet door den condensator*; de weerstand der leiding is dan slechts 240 Ohms.

Om uit te maken, met welk dezer beide gevallen men te doen heeft, is het voldoende, een weerstand van eenige duizend Ohms in de leiding te brengen. Is de weerstand der lijn werkelijk 1248240 Ohms, dan zal de invoeging van enkele duizenden meer zoo goed als geen invloed op de stroomsterkte hebben, en dus het geluid in de telefoon niet van intensiteit doen veranderen. Is echter de leidingsweerstand slechts 240 Ohms, dan zullen de stroomen, door zoodanige invoeging, zeer verzwakken, en daarmee zal ook het geluid in de telefoon veel zwakker worden.

Ik bracht nu een seleencel van 26000 Ohms in de lijn en bemerkte toen dat het geluid ontzachelijk verzwakte. Derhalve was de condensator niet als weerstand in de lijn en heeft men in dit geval te doen met capaciteits-veranderingen.

Op deze wijze had ik een elektrostatischen transmitter verkregen, en daar een condensator bovendien ook als ont-

vanger kan dienen, lag de veronderstelling voor de hand, dat men ook van den eenen condensator in den anderen zou kunnen spreken. Met twee condensatoren en een ladingsbatterij moest dit gelukken. Werkelijk was dit het geval. Twee paraffine-condensatoren, van hetzelfde model als de vroeger beschrevene, werden met 36 kleine Faure-elementen verbonden. Wanneer men nu sprak of zong tegen den eenen condensator, kon men alles in den anderen verstaan, ofschoon het geluid uiterst zwak was.

Beter resultaat verkreeg ik, door de condensators evenwijdig in de lijn te brengen (fig. 6), waardoor elk tot het geheele potentiaal der batterij geladen was. Sprak men nu tegen *a*, dan kon men in *b* alles verstaan, en, ofschoon nog steeds zwak, was het geluid sterker dan bij de vorige proef. Se is een selenium-cel van 26000 Ohms, ware deze niet aanwezig, dan zou het grootste gedeelte der electriciteit, door *a* verzonden, door de batterij, en dus niet naar *b* gaan.

Ware een volmaakte isoleering mogelijk, dan zou men volgens dit systeem kunnen telefoneeren zonder batterij, daar het dan voldoende zou wezen, de condensatoren éénmaal een lading te geven.

Volgens Dumoncel *) heeft ook Maiche getelefoneerd met een condensator als transmitter. Lang voor dezen, was echter de mogelijkheid daarvan reeds door Edison †) in het licht gesteld.

Delft, Deember 1883.

---

*) *le Téléphone*, 4e Ed., p. 294.

†) *Engineer* 1878, Bd. 46, p. 425.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXVI. De Spiegeling der Singconst van Simon Stevin.

1. Toen ik onlangs in de Bibliotheek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam bezig was met het onderzoeken van de verzameling handschriften Huygens, ten opzichte van brieven van of aan Christiaan Huygens, — kreeg ik in handen een bundel Adversaria, gemerkt »Handschriften XLVII."

Al dadelijk meende ik daarin eenige verloren manuscripten van Simon Stevin te ontdekken, en een nader onderzoek bevestigde dit vermoeden volkomen.

In het werk toch van Simon Stevin, getiteld »Wisconstighe Gedachtenissen, V Stuck, blz. 107" [zie Bouwstoffen XXI, Noot 52] en de vertaling daarvan door Willebrordus Snellius, »Hypomnemata Mathematica, Tomus V, pag. 205" [zie Bouwstoffen XXV, Noot 21] komt eene lijst voor van verhandelingen van Stevin, die niet opgenomen werden. In de fransche vertaling door Jean Tuning »Memoires Mathématiques . . . Leyde chez Jan Paedts Jacobsz. 1608. folio" [zie Bouwstoffen XXV, Noot 25] ontbreekt deze lijst. In het werk »Wisconstigh Filosofisch Bedrijf" van Hendrick Stevin,

die daarin enkele stukken van zijn vader SIMON overneemt [zie Bouwstoffen XXV, Noot 36], verhaalt de zoon in het 1ste Boek, 1 Voorstel, blz. 5, hoe »de hantschriften (welke nu deur onachtsaemheyt al veel jaren || onder verscheyden geleerde handen waren vertrout, sonder yets anders, || onses wetens, daer me verricht te zijn [d. i. zonder uitgegeven te zijn], als datse van vele voltrockene de- || len, daer wij genoegsame kennis af menen te hebben, geledigt, en sulcx || de rest heel ongeret, wijt en zijt deur malcander verstroyt waren)."

Onder die verloren handschriften behoorde ook de »Spiegeling der Singconst", en het is o. a. dit werk, dat ik in genoemden bundel terugvond, onder denzelfden titel. Tot bewijs, dat het werkelijk de arbeid van SIMON STEVIN was, moge dienen, dat het daar voorkomt te midden van nog andere stukken van dien schrijver, en voorts, dat het »CORTBEGRIJP" van het werk zelf en dat van de »BYVOUGH" geheel overeenkomen met hetgeen daarvan wordt vermeld in de »Verrechting van Domeine" [zie Bouwstoffen XXV, Noot 34a, behoorende als 2de Deel bij zijn »Materiae Politicae", Noot 34 aldaar], Anhang, laatste gedeelte, blz. 147, waar de »Tytels en Cortbegrijpen totte Wisconstige Gedachtenissen" voorkomen.

2. In den voornoemden bundel van Adversaria vindt men nu genoeg belangrijks omtrent het verloren werk van SIMON STEVIN, om daarvan een afdruk te rechtvaardigen.

Behalve toch de Spiegeling der Singconst zelve komt daarbij nog een aantal stukken voor, die daarop betrekking hebben. Ik heb dus gemeend het best te doen, die Spiegeling te laten voorafgaan, en daarop de andere stukken, in zoo verre zij van belang zijn, ten deele als bijlagen te doen volgen.

3. Na een hoofdtitel »*Musica*" en een tweeden »*Singconst van* || *Stevin*" (die mij eigenlijk eerst op het spoor bracht) volgen eenige onvolledige, bovendien niet eens in goede volgorde zamengevoegde, brokstukken en daartusschen een nieuwe titel »*Spiegheling der* || *Singconst* || *met cladden van dien.*" Ten slotte eenige muziekstukjes.

Dan volgt »DE || SPIEGELING DER || SINGCONST || *Beschreven deur*" in 27 + 4 bladzijden 4°, die hierachter na het hoofd-

werk afgedrukt te vinden is. Bij toeval als het ware komt hier als bewijsstuk, dat men hier met de papieren van STEVIN zelven te doen heeft, op een voorgaande bladzijde de titel »*Musiec*" voor; maar dit werd daarop geschreven nadat was uitgeschrapt een vroegere titel »Octroyen van Watermolens", een andere arbeid van STEVIN, waarop wij later zullen terugkomen.

Deze »Spiegeling" is misschien een eerste opstel van STEVIN, dat naderhand in anderen vorm werd verwerkt: men vindt hier wel dezelfde redeneeringen, hoezeer veel uitvoeriger uitgewerkt, en ook wel denzelfden inhoud, maar op geheel andere wijze verdeeld. Zoo is bijv. alles wat betrekking heeft op de »Singconst der Grieken" later in het »Bijvough" gebracht.

Hoezeer het mij tot nog toe niet gelukte het schrift — dat somtijds aan duidelijkheid wel wat te wenschen overlaat, ja een enkele maal een ware »cladde" is met doorhalingen en invoegingen, — met eenigen brief van SIMON STEVIN te kunnen vergelijken, — bewijzen nochtans juist die uitkrabbingen en verbeteringen, dat dit werk door den ontwerper zelven geschreven en nagezien is, en niet door een ander werd overgeschreven. En voor de meening, dat het werkelijk van SIMON STEVIN is, pleiten de volgende redenen. Vooreerst dat alles steunt op dezelfde berekeningen als later in het werk zelf voorkomen, en die STEVIN voor nieuw houdt. Ten tweede uit zijne bijna dweepachtige vereering van de »Duytsche tael". Vervolgens ook het gebruik van *sa* in plaats van *si*, hetgeen door STEVIN zelf als in strijd met het gewone gebruik aangegeven wordt.

Nu komen er, echter in geheel andere volgorde gebonden, de Bijlage A—F voor, die behooren bij een schrijven van ABRAHAM VERHEIJEN, organist te Nijmegen aan SIMON STEVIN, en alle betrekking hebben op onze »Spiegeling".

Na een achttal bladzijden folio over »VERRECHTING van Domeine van SIMON STEVIN", waarover later, vindt men eindelijk het ware

»DERDE DEEL DER || GHEMENGDE STOFFEN || VANDE || SPIEGHELING || DER || SINGCONST. || *Beschreven door* || SIMON STEVIN."

28 bladzijden in folio, en

»Byvouch der || Singconst."

15 bladz. folio.

En dit is nu het hoofdwerk, waarvan de Cortbegrijpen geheel overeenkomen met hetgeen van elders daaromtrent bekend was.

Het is hier met een fraaien klerkenhand overgeschreven.

Uit eerbied voor dit geheel onbekende handschrift, alsmede om het terugvinden van eenig woord, bij het soms zeer onduidelijk geschrevene, mogelijk te maken, heb ik het bladzijde voor bladzijde, en regel voor regel doen afdrukken.

DERDE DEEL DER

GHEMENGDE STOFFEN

VANDE

SPIEGELING

DER

SINGCONST

Beschreven door

Simon Stevin.

CORT BEGRYP.

Angesien mijn voornemen is te beschryven een spiegeling der singconst, soo sal ick, om mijn meyning wel te verclaren, dat doen, sonder vermenging des geens bij de Oude Griecken mette Spiegelaers deses tijts niet recht getroffen en schijnt, inde evenredenheyt der geluijden met haer lichamen, en int oirdeel van goe of qua geluijden, waar af ick in een bijvouch besonderlick handelen sal, om alsoo gelijck ick in meer ander stoffen gedaen heb, de leering met geen strijding te verduijsteren.

Ande Sangmeesters

deses tijts.

I. *Bepaling.*

Met gelujt des gesancx verstaetmen, dat geduerlick even hooch een oirdentlicke grofheyt heeft.

Verclaring.

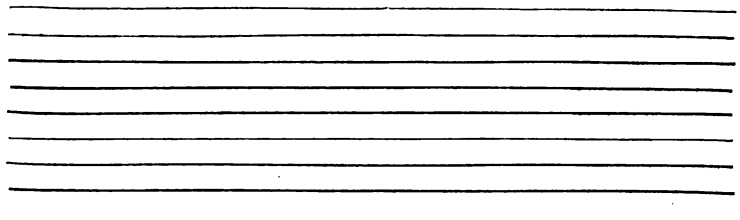
Imant soude int singen wel connen gebrujcken gelujden, die elck geduerlick niet even hooch en waren, gelijck de katten meawen, honden hujlen, of ander gedierten roepen, maer ten soude geen sanck sijn, die wij int gemeen natuerlic noemen, en van wiens grofheijt, of fijnheijt, hoocheijt of leecheijt, een seecker oirdeel is; en daerom en sijn soodanige geen gelujden des gesancx, maer sulcke als de bepaling inhout.

II. *Bepaling.*

*) Singleer is die bestaet in evewijdige linien, op de wijse der trappen van een leer, daer der singteijckens climming en daling door beduyt wort.

Verclaring.

Als de linien hier onder:



*) *Scala musica.* [Deze aanmerkingen staan bij het handschrift in margine.]

III. *Bepaling.*

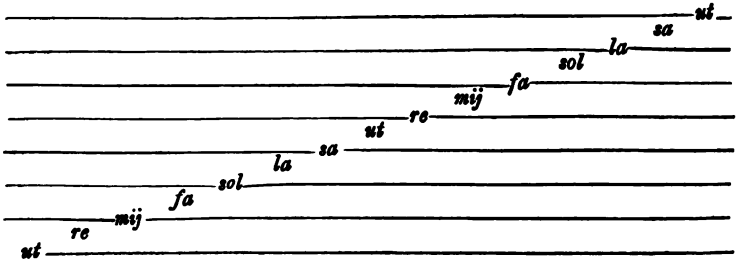
*) *Trap* is de naeste vervolgende climming of dalingh diemen inde natuerlicke sanck climt of daelt, en wort op de singleer beteijckent van een lini tottet naeste middel tusschen twee linien.

IIII. *Bepaling.*

De namen van elcke seven oirdentlicke vervolgende climmende trappen, sijn dusdanich: *ut*, *re*, *mij*, *fa*, *sol*, *la*, *sa* †).

Verclaring.

Deze namen der trappen op eenige singleer vervoucht, sijn als hier onder:



V. *Bepaling.*

Evelange tijden, diemen int singen beteijckent met §) slagen (gemeenlijk des vingers) worden slagen of maten genoemt.

VI. *Bepaling.*

De **) singteijckens diemen inde sanck gebruijckt sijn dusdanich

---

*) *Gradus.*

†) De reden waerom hier *sa* geseijt is in plaets vant gemeen *si*, sal inden byvouch verclaert worden. [waar ik echter niets daaromtrent heb gevonden.]

§) *Tactus.*

**) *Notulae.*

van een slach.

of van een halve slach of twee op de slach.

of van een vierendeel slachs of vier op de slach.

of van een achtendeel slachs of acht op de slach.

of van een sestiendedeel slachs of sestien op een slách, maer 2, 3 of 4 in een vierhoeck aldus gestelt [2] [3] [4], sijn teijckens van twee, drie of vier slagen, en soo voorts met ander beduijt het getal altijt de menichte der slagen.

VII. *Bepaling.*

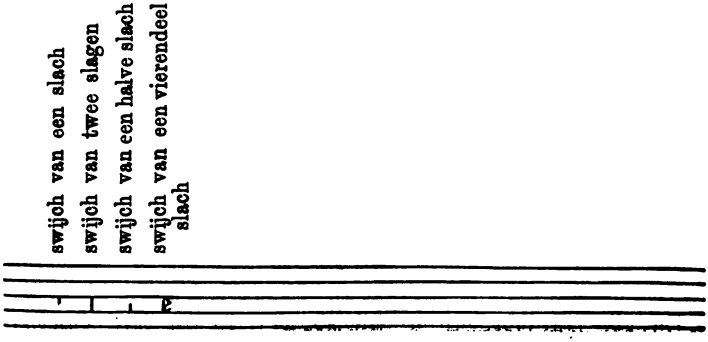
Een punt achter een singteijcken, verlangt dat zijn helft.

Verclaring.

Als . geduert een slach en een half, . een halve slach en een vierendeel, en soo voorts met d'ander.

VIII. *Bépaling.*

De *) swijchteijckens zijn dusdanich:



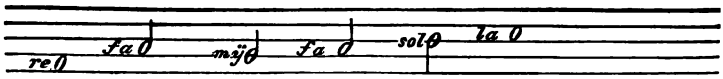
*) *Pausae.*

IX. *Bepaling.*

De singteijckens ontfangen namen der trappen daerse op staen.

Verclaring.

Als hier onder het singteijcken 𝅗𝅥 op den trap *re*, heet *re;* ende 𝅗𝅥 op den trap *fa*, heet *fa*, en soo voorts met d'ander.



X. *Bepaling.*

Twee geluijden even hooch, of op een selve trap zijnde, haer verlijcking wort eerste genoemt, een trap verschillende tweede, twee trappen verschillende derde, en soo voorts totte achste: Wiens oirdentlicke vervolgende trappen, heeten dobbel tweede, dobbel derde, en soo met d'ander, totte dobbel achtste. En s'gelijcx is oock den voortganck met drievoudige en meervoudige tweeden, derden, en haer volgende. T'is oock bij eenige int gebruijck de trappen nade achste volgende, te noemen negende tiende, elfde en soo voorts, in plaets van dobbel tweede, dobbel derde.

XI. *Bepaling.*

De vijf trappen van *ut* tot *re*, van *re* tot *mij*, van *fa* tot *sol*, van *sol* tot *la*, en van *sa* tot *ut*, sijn groot: D'ander twee van *mij* tot *fa*, en van *la* tot *sa* cleen.

XII. *Bepaling.*

De tweede, derde, en vierde, daer een cleene trap in is, heet cleene tweede, cleene derde, cleene vierde; De vijfde seste en sevende, daer twee cleene trappen in sijn, heet cleene vijfde, cleene seste, cleene sevende: Maer de tweede met een groote trap, de derde met twee groote trappen, en de vierde met drie groote trappen, heeten groote tweede, groote derde, groote vierde: De vijfde, seste, en sevende, daer maer een cleene trap in en is, heeten groote vijfde, groote seste, groote sevende: s'Gelijcx worden de cleene of groote negende, cleene of groote tiende, oock genoemt cleene of groote dobbel tweede, cleene of groote dobbel derde, en soo voorts.

XIII. *Bepaling.*

De verlijcking der twee geluyden vande eerste heet oock selftoon: der cleene tweede halftoon, der groote tweede toon; En voorts na de menichte der thoonen noemt mense anderhalf thoon, tweethoon, twee en half toon, driethoon en soo voorts met d'ander.

Verclaring.

De verlijcking vande twee geluijden ontfangen twederleij verscheijden manieren van namen, soose inde, 10 en 12e bepaling beschreven zijn, die elck haer besonder gebruijck hebben; want wesende de redens der geluijden te vergaren of van malcander te trecken, daer int volgende afgezeijt zal worden, men noemtse bequamelick deur de namen der thoonen

overmits dat totten tweethoon, vergaert den driethoon, haer somme is den vijftoon; Treckende den tweethoon vanden drieenhalfthoon, blijft den anderhalftoon; Inder vougen dat sommen en resten namen der getalen crijgen, lijckvormich ant geene sij zijn. De namen van eersten, tweeden, derden etz. sijn bequamer om int dadelick*) gesangk, maecksel, en int spreecken van rijsing en daling te gebruycken; want lichtelicker en bequamelicker telt men t'verschil van twee geluijden, deur trappen nade natuerlicke sanck climmende of dalende, dan deur thoonen en halfthoonen, overmits de menichte der trappen met de menichte der thoonen niet nootsaeckelick over een en comt, gemerckt sommige driethoon een vierde is, te weten de groote vierde, sommige driethoon een vijfde, te weten de cleene vijfde.

XIIII. *Bepaling.*

Goe geluijden sijn de twee der eerste, der cleene derde, groote derde, en cleene vierde, mitsgaders alle achste of menichvuldige achste, van het eene dier twee geluijden tegen het ander, de rest der geluijden is quaet.

Verclaring.

Dat de twee geluijden des selftoons der cleene derde, groote derde, en cleene vierde goet geseijt worden is verstaenlick genouch: Angaende voorder geseijt is, mitsgaders alle achtste of menichvuldige achste vant een dier twee geluijden tegen het ander, dat sal ick by voorbeelt verclaren,

---

*) *Compositione Cantus.*

Laet tot dien eijnde genomen worden de twee geluijden der cleene derde, en tegen het leeghste geluijt zij gehoort de rijsende achtste vant hoochste, sij sullen t samen maken de dobbel cleene tweede; die eenige oock de cleene thiende noemen, oock goetluijdich sijnde: Maer tegen t'voorsz. leeghste geluijt gehoort de dalende achste vant ander, sij sullen t'samen maecken de goetluijdige groote seste; En dergelijcke sal oock gebueren alsmen tegen het hoochste geluijt hoort de rijsende of dalende achste vant leeghste. Ende s'gelijcx doende mette groote derde, de achste vant een geluijt sal tegen t'ander maken de goeluijdige groote dobbel derde of cleene seste. Ende s'gelijcx doende mette cleen vierde, de achste vant een geluijt zal tegen t'ander maken de goeluijdige cleene dobbel vierde of groote vijfde: Sulcx datter in als seven goe geluijden sijn met haer veelvoudige; te weten cleen derde, groote derde, cleen vierde, groote vijfde, cleen seste, groote seste, en de achste.

Belangende datter inde bepaling geseijt is al de rest der geluijden quaet te wesen, die sijn in getale ses met haer veelvoudige, te weten de cleene tweede, groote tweede, groote vierde van *sa* rijsende tot *mi*, de cleen vijfde van *sa* dalende tot *mi*, de cleen sevende, de groote sevende.

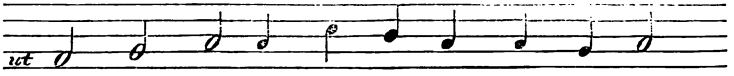
Tot hier toe verclaert sijnde tgeene daermen gesanck me beteijckenen can, wij sullen noch bepalen wat natuerlicke en singconstighe sanck is.

XV. *Bepaling.*

Natuerlicke sanck noemt men diemen deur natuerlicke climming en daling der stemmen singt.

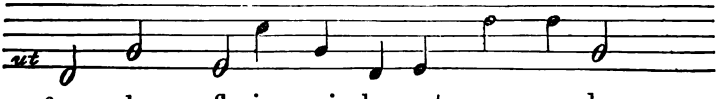
Verclaring.

Als bij voorbeelt, gesongen zijnde de navolgende singteijckens of woorden daer me over commende, wantse een climming en daling der stemmen hebben, met vermenging van half thoonen, tot soodanige plaets, als daer wij die uijter nateur geneijcht sijn te vervougen, soo heet sulcx natuerlicke sanck.



frans - ken flo - ris wie he - vet u ge - daen

Maer om dit deur onnatuerlicke mishagelicke climming en daling noch beter te verclaren, soo sal ick de voorsz. woorden noch eens onder ander singteijckens stellen als volcht.



frans - ken floris wie he - vet u ge - daen

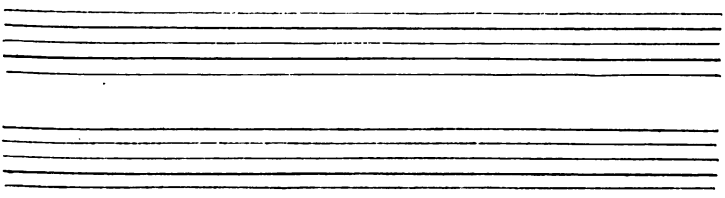
Alwaer blijckt dat vant eerste singteijcken tottet tweede geclommen wort, de qua groote vierde of driethoon, die eenige de onsingelicke heeten, om datse al singende niet wel te treffen en is; Ende alsoo is int dalen oock quaet om treffen de cleene vijfde, gelijck hier vant negende singteijcken tottet laetste; Oock sijn groote ende cleene seste en sevende, gelijck in dit voorbeelt eenige genomen worden, moylick om treffen, en mishagelick int gehoor. welcke de menschen die uijtter natuer singen niet geneijcht en zijn te gebruijcken.

XVI. *Bepaling.*

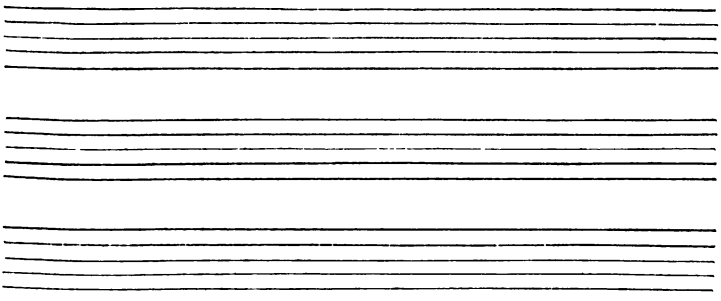
Singconstige sanck noemtmen, die uyt twee of meer natuerlicke t'saemluijdende gesangen bestaet, niet evehooch climmende, noch eveleech dalende, en sonder qua thoonen, daer in te vallen.

Verclaring.

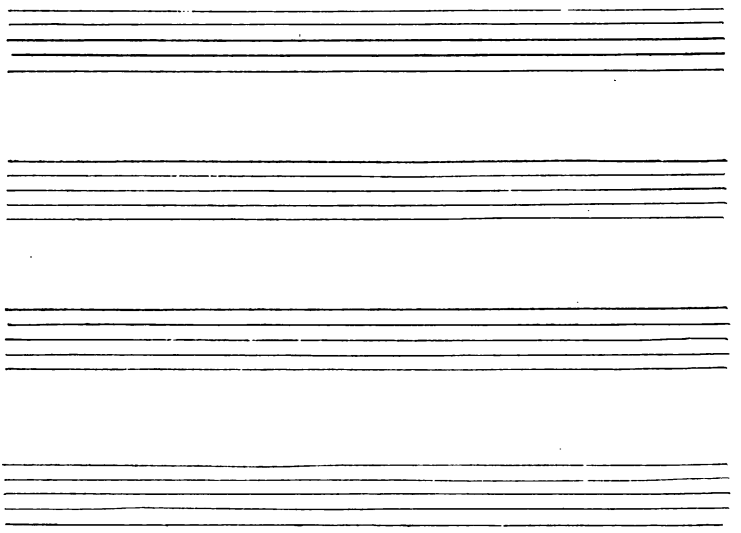
T'gebeurt, dat een mensch yet alleen int wilde wel singt sonder an eenige ander sanck verbonden te sijn. Doch wantmen dat uijtter natuer, sonder leeren doen can, soo en wort daer me geen singconstige sanck verstaen, maer wel mette geene die de bepaling inhout; Om daer af voorbeelt te geven, laet een gesanck zijn van twee stemmen als hier onder:



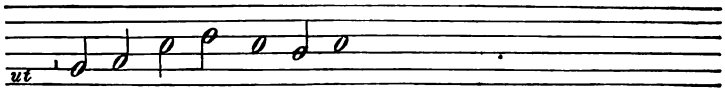
Ander voorbeelt met drie stemmen,

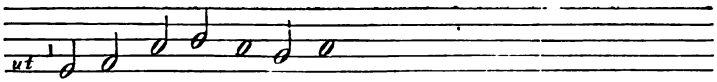


Ander voorbeeld met vier stemmen,



Waer in nergens twee geluijden t'samen even hooch en climmen noch even leech en dalen, oock sonder een qua thoon daer in te commen. D'oirsaeck waerom die even climming en daling inde singconstige sanck niet geleden en wort, is dat sulcx toegelaten wesende, weijnich const soude gelegen zijn, in gesanck te maecken, ten anderen dat sulcke selfheijt niet behaegelick en is. Doch staet hier te gedencken datmen sich niet en moet bedriegen mette gelijcke namen der trappen, als dat ijmant, sonder onderscheijt van groote en cleene trappen, seijde int gemeen geen derde of seste malcander te mogen volgen, dat waer gemist, want soo dickwils na de groote een cleene, en na de cleene wederom een groote volcht, soo en gater niet tegen de regel: Als bij voorbeelt, want dese acht derden, malcander volgende, deurgaens sulcke verandering hebben, soo en isser geen even climming of dalinge.





Vierden en vijfden en connen met even climming of daling achter malcander niet volgen sonder tegens de regel te gaen, om datter maer een goe vierde en is, dats de cleene en een goe vijfde te weten de groote deur de 14 bepalinge.

Vertooch. I. Voorstel.

De heele gespannen snaer en haer gedeelten eeveredenich te wesen, mette grofheijt haerder geluijden.

Als men de heele gespannen snaer van eenigen speeltuijch opt middel stopt, d'ervaring leert dat de heele tegen haer helft de achtste maeckt. Waer uijt wijder volcht dat den helft der heele tegen haer helft oock een achste moet clincken, en daerom de heele snaer tegen haer vierendeel een dobbel achste en soo voort met d'ander noch kleender helften. Maer de grofheyt des leeghsten geluijts der achste noemen wij dobbel of tweevoudich totte grofheijt des hoochsten, daerom sulcken *) afcomst van dobbelheijt of reden als dat is in sijn †) geslacht, dergelijcke afcomst is de drievou of viervoudige reden der Grofheijt des geluijts der heele snaer totte grofheijt des vierendeels; Dat is gelijck de heele snaer tot haer helft, vierendeel, of achstendeel, alzoo de grofheijt vant geluijt des heelen snaers totte grofheijt vant geluijt des helfts, vierendeels, of achtendeels: Maer gelijck de everedenheyt der snaerdelen en haer geluijden in die bestaet, alsoo vereijscht de reden datmen toelate de everedenheijt te bestaen in alle andere deelen en grofheijt haerder geluyden twelck wij bewijsen mosten. *T besluyt.*

---

*) *Species.*

†) *Genere.*

Vertooch. II. Voorstel.

Vant een geluijt der achste tottet ander twelf eevegroote halfthoonen te weesen.

Om hier af tottet begeerde te commen, ick sal eerst verclaren datter vant een geluijt der achste tottet ander, ses evegroote thoonen sijn; daer na dat de selve twelff evegroote half tonen doen. Angesien het de natuer soo niet vervougt en heeft, dat wij deur natuerlicke gestalte ses heele thoonen met seker oirdeel connen achter malcander singen, soo sal ick om tottet bewijs te commen eenige speeltuijch tot hulpe nemen, en daer me voorbeelt geven. Laet onder andere reetschappen genomen sijn twee clavesingels daer af het *mij* der leechste ende het climmende *sa* van d'ander in een selfde hoochde sijn, twelck soo wesende, van *sa* onder de voorsz. *mij* der leechste clavesingel tottet selve *mij* sijn (welverstaende alsmen de *) spleten ongeroert laet †)) drie heele evegroote thoonen. En van dat *mij* of anders van het boveschreve *sa* van d'ander (dat een selve is, om datse deur t'gestelde evehooch sijn) tottet *mij* daer boven, sijn oock drie heele thoonen, sulcx datmen daer mede sal hebben en connen hooren ses vervolgende heele thoonen die, als geseijt is, de menschen met geen seecker oirdeel vervolgens singen en connen. Ende sal alsdan d'ervaring betuijgen het bovesz. *mij* der hoochste clavesingel tottet bovesz. *mij* der leechste, de volcommen achste te maken: Waer mede het eerste deel bewesen is.

Angaende het ander, te weten elcke heele thoon twee evegroote halftoonen te doen, wort aldus verclaert:

---

*) *Penten.*

†) De woorden, ongeroert laet, heb ick gestelt in plaets van een woort dat ick niet lesen conde meenende uijt ander cladde dat de sin daer oock te wesen.

De acht geluijden der achste na natuerlicke sanck gesongen, hebben seven trappen, te weten vijf heele thoonen, die deur t'voorgaende evegroot sijn, en twee halve, daerom dese twee halve maecken t'samen den sesten thoon, even an elcken van d'ander vijf: Maer den halfthoon als van *mij* tot *fa* en van *la* tot *sa*, sijn evegroot, daerom sij doen elck den rechten helft eens heelen toons, waer deur ijder heele thoon twee evegroote halve doet, en vervolgens de ses heele thoonen twaelf evegroote halve. Ende die hier af noch nauwer prouve begeerde dan mette stemmen, mocht nemen een welgestelde Clavesingel, waer in hij de vijfde der twee spleten na *sa* en *fa* (dat zijn de *) spleten diese *gis* en *fis* noemen) sal bevinden goet te wesen: Waer uijt volcht dat de splete of halfthoon na *sa* even soo veel moet climmen boven *sa*, als de spleete of halfthoon na *fa* boven de selve *fa*, en vervolgens dat die twee halfthoonen even groot moeten zijn, t'welck wij bewijsen mosten. *T'Besluyt.*

Werekstuck. III. Voorstel.

Deur de dobbel reden vande grofheijt der twee geluijden vande achtste, te vinden de reden der grofheijt van alle gegeven twee geluijden des gesancx.

Angesien deur het eerste voorstel t'leeghste geluijt der achste, dobbel is tottet hoochste, ende dat deur het tweede voorstel vant een tottet ander twaelf evegroote halfthoonen zijn, soo ist kennelick dat wij tusschen

---

*) *Fenten.*

twee en een moeten vinden elf middelevereedenige getalen, die bekent connen worden deur het 45 voorstel van mijn Fransche Telkonst; Maer om daer in wat cortheijt en claerheijt te gebruijcken. Ick seg aldus: nademael het een uijterste getal doet 1 t'ander 2, soo vinde ick van 1 en twee het derde everedenich getal 4, daer na het vierde 8, tvijfde 16, en soo voort tot de twaelfde, dat sijn sal van 4096. Al dese getalen in menichte tot derthien, segh ick elck te wesen wortel der twaelfde grofheijt als √ (12) 1. √(12) 2. √(12) 4. en soo voorts totte laetste dats √ (12) 4096. Ende want die in geduerige everedenheijt sijn tusschen de twee uyttersten √ (12) 4096 en √ (12) 1, doende 2 en 1. soo is hier me gevonden de volcommen reden der voorgestelde geluijden telckens met een halfthoon vermeerderende; welcke oirdentlick bij den anderen vervoucht dusdanich zijn.

Reden der twee geluijden des

Selfthoons dats der eerste is van 2 tot . . √ (12) 4096.
Halfthoons dats der cleen tweede, is van 2 tot √ (12) 2048.
Thoons dats der groote tweede is van 2 tot √ (12) 1024.
Anderhalfthoons dats der cleen derde is van 2 tot √ (12) 512.
Tweethoons dats der groote derde is van 2 tot √ (12) 256.
Tweeenhalfthoons dats der cleen vierde is van 2 tot √ (12) 128.
Driethoons dats der groote vierde of cleene vijfde is van 2 tot . . . . . √ (12) 64.
Drie en halftoons dats der groote vijfde is van 2 tot. . . . . √ (12) 32.
Viertoons dats der cleen seste is van 2 tot √ (12) 16.
Vierenhalftoons dats der groote seste is van 2 tot √ (12) 8.
Vijfthoons dats der cleene sevende is van 2 tot √ (12) 4.
Vijfenhalftoons dats der groote sevende is van 2 tot √ (12) 2.
Sesthoons dats der achste is van 2 tot . . . . √ (12) 1.

En bij aldienmen aldus wilde voortvaren met dobbeling

der voorgaende getalen, tis kennelick dat voor de dobbel cleen tweede soude commen √ (12) 8192, ende voor de dobbel groote tweede √ (12) 16384 en soo voort met d'ander; Waer me de regel over alle gegeven twee geluijden des gesancx gemeen is.

Maer soomen de boveschreven redens wilde beschrijven mette minste getalen dieder vallen en even in weerde mette voorgaende doch sonder oirdentlick vervolch als boven, en met wortelen van verscheijden grootheden, die salse na de wijse des voorsz. 45e voorstel van mijn Fransche Telconst dusdanich vinden.

Reden der twee geluijden t'een des heelen snaers t'ander des deels clinckende den

Selfthoon dats de eerste is van 2 tot . . . . 2.
Halfthoon dats de cleen tweede is van 2 tot √ (12) 2048.
Thoon dats de groote tweede is van 2 tot . √ (6) 32.
Anderhalfthoon dats de cleen derde is van 2 tot √ (4) 8.
Tweethoon dats de groote derde is van 2 tot √ (3) 4.
Twee en halfthoon dats de cleen goe vierde is van 2 tot . . . . . √ (12) 128.
Driethoon dats de groote qua vierde of cleen qua vijfde is van 2 tot . . . . . √ 2.
Drie en halfthoon dats de groote goe vijfde is van 2 tot . . . . . √ (12) 32.
Vierthoon dats de cleen seste is van 2 tot . √ (3) 2.
Vierenhalfthoon dats de groote seste is van 2 tot. . . . . √ (4) 2.
Vijftoon dats de cleen sevende is van 2 tot. √ (6) 2.
Vijfenhalftoon dats de groote sevende is van 2 tot . . . . . √ (12) 2.
Sesthoon dats de achste is van 2 tot. . . . 1.

Werckstuck. IIII. Voorstel.

De reden der grofheijt van alle twee geluijden des gesancx ten naesten te vinden in sulcke delen, alsser de grofste 10000 doet.

Int derde voorstel sijn wel beschreven de volcommen redens der geluijden; maer gemerckt de deeling der snaer (twelck een der voorneemste eijnden deses handels is) op sulcke wijse tot noch toe niet wisconstelick bekent en is, wij sullen de bovesz. redens andermael beschrijven na t'inhout deses voorstels, te weten soo dattet meeste getal, of de deelen der heele snaer altijt sij van 10000, want hoewel het ander getal op de laetste letter wat onvolcommenheijt heeft, soo en is dat inde daet van geender acht, gelijckt in veel soodanige anders toegaet.

Om dan te beginnen mette lichtste wijse, die mij nu te vooren comt, Ick segh aldus: Des driethoons twee geluijden zijn volcommelick inde reden van 2 tot $\sqrt{2}$ deur het 3 voorstel; Daerom segh ick 2 geeft $\sqrt{2}$ wat 10000? comt voor d'ander pael 7071, dats voor reden des driethoons . . . . . $\frac{10000}{7071}$

Wederom des anderhalftoons twee geluijden sijn in reden van 2 tot $\sqrt{(4)}$ 8 deur het 3 voorstel daerom seg ick 2 geeft $\sqrt{(4)}$ 8 wat 10000? comt voor d'ander pael 8408, dats voor reden des anderhalfthoons . . . . . $\frac{10000}{8408}$

Ten derden des tweethoons twee geluijden sijn inde reden van 2 tot $\sqrt{(3)}$ 4, deur het 3 voorstel, daerom seg ick 2 geeft

√ (3) 4 wat 10000? comt voor d'ander pael 7937, dats voor reden des tweetoons . . $\frac{10000}{7937}$

Daer af getrocken de reden des anderhalf thoons $\frac{10000}{8408}$ tweede in d'oirden blijft voor reden des halftoons . . . . . $\frac{10000}{9440}$

Die vergaert tot noch sulcken reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ comt voor reden des heelen toons. . . . . $\frac{10000}{8911}$

Ende de reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden vergaert totte reden des tweethoons $\frac{10000}{7937}$, derde in d'oirden comt voor reden des twee en halftoons . . $\frac{10000}{7493}$

Tot reden des driethooons $\frac{10000}{7071}$ eerste in d'oirden, vergaert reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden, comt reden des drieenhalfthoons . . . . . $\frac{10000}{6675}$

Daer toe vergaert reden des halfthoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden comt reden des viertoons. . . . . $\frac{10000}{6301}$

Tot reden des driethoons $\frac{10000}{7071}$ eerste in d'oirden vergaert reden des anderhalf-toons $\frac{10000}{8408}$ tweede in d'oirden comt reden des vierenhalftoons . . . . . $\frac{10000}{5945}$

Tot reden des driethoons $\frac{10000}{7071}$ eerste in d'oirden vergaert reden des tweetoons $\frac{10000}{7937}$ derde in d'oirden comt reden des vijfthoons. . . . . $\frac{10000}{5612}$

Daer toe vergaert reden des halfthoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden comt reden des vijfenhalfthoons . . . . . $\frac{10000}{5298}$

Tot proeve der voorgaende werckingen can noch verstrecken dat tot reden deser vijfenhalfthoons $\frac{10000}{5298}$ vergaert reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden comt reden des sestoons $\frac{10000}{5001}$, twelck om volcommen te wesen zoo soude de cleenste pael 5001 alleenlick 1 min moeten sijn.

Maer om de bovegevonde getalen met oirdentlick vervolch te hebben, ick stelle aldus,

Reden der twee geluijden des	
Selfthoons, dats der eerste is van 10000 tot . .	10000
Halfthoons, dats der cleen tweede is van 10000 tot.	9440
Thoons dats der groote tweede is van 10000 tot.	8911
Anderhalfthoons dats der cleene derde is van 10000 tot.	8408
Tweetoons dats der groote derde is van 10000 tot.	7937
Tweeenhalfthoons dats der cleen vierde is van 10000 tot	7493
Driethoons dats der groote qua vierde of cleen qua vijfde van 10000 tot	7071
Drieenhalftoons dats der groote vijfde van 10000 tot	6675
Vierthoons dats der cleen seste van 10000 tot .	6301
Vierenhalfthoons dats der groote seste van 10000 tot	5945
Vijfthoons dats der cleen sevende van 10000 tot	5612
Vijf en halftoons dats der groote sevende van 10000 tot	5298
Sesthoons dats der achtste van 10000 tot	5000

T'bewijs is hier af deur twerck openbaer. *T besluyt.*

1. *Merck.*

Ick heb het eerste, tweede en derde des oirdens deses 4 voorstels gevonden deur worteltreckingen uijt de volcommen getalen des 3 voorstels: Bij aldien soo gedaen wierde met d'ander volgende des oirdens (alswaer ick mij om lichticheijts wille beholpen heb sonder worteltreckinge, te weten met vergaring en aftrecking der redens, als blijckt) het soude om bekende oirsaecken, op de laetste letter, wat meerder seeckerheijt geven, welcke den geenen hebben can die sulcke worteltrecking doet.

2. *Merckt.*

Uijt het voorgaende is kennelick de deeling der sanglijn: Oock me om dat in een speeltuijch de langhde tusschen de brugge en t'uijterste vanden hals gedeelt in 10000 even deelen eerste in d'oirden, en vande brugge af getelt 9440 tweede in d'oirden, dat ten eijnde vandien de plaets is des eersten bants vanden eersten halftoon: Sgelijcx vande brugge afgetelt 8911 derde in d'oirden, dat ten eijnde vandien de plaets is des tweeden bants vande tweehalfthoon, en soo voorts met d'ander. Maer wanttet inde daet geriviger valt sulcke telling vant begin des halses an te vangen, soo is kennelick datmen sal trecken 9440 tweede in d'oirden van 10000 eerste in d'oirden, en de rest doende 560 sijn de deelen diemen vanden hals af tellen moet om te commen ter plaetse vanden eersten bant,

en soo voorts met d'ander. Maer om int leggen of teijckenen der banden niet telckens alsoo te moeten aftrecken, soo machmen dat eens voor al doen, gelijck de navolgende teijckening uijtwijst.

Vant begin des hals totten	Eersten bandt	560	deelen 10000.
	tweeden bandt	1089	
	derden bandt	1592	
	vierden bandt.	2063	
	vijfden bandt.	2507	
	sesten bandt	2929	
	sevenden bandt.	3325	
	achtsten bandt	3699	
	negenden bandt	4055	
	thienden bandt.	4388	
	elfden bandt	4702	
	twaelfden bandt	5000	

III. *Merck.*

Tis kennelick datmen deur t'behulp der sanglijn wel verdeelt zijnde en een onvalsche snaer hebbende met lichticheijt en groote seeckerheijt sal connen stellen Clavesingels en orgels. Maer om vande goetheijt of valsheijt eens snaers seeckerheijt te hebben, dat wort beproeft op des sanglijns (gelijck oock luijten, Cijters en meer ander speeltuijgen die gestopt worden) helft, vierendeel en achtendeel an wedersijden, want die maeckende volcommen achtsten, dobbelachtste

en drievoudige achtsten, sij is voor goet te houden, maer anders gebeurende, soo ist verkeerde daer uijt te oirdelen.

IIII. *Merck.*

Hoewel de heele snaer hier boven gedeelt wort in 10000 soo is kennelick dat 1000 deelen inde daet genoech zijn, mits datmen d'ander getalen elck van een letter vercort: Doch soo is dit getal van 10000 genomen tot overvloet om datmen deur de eerste gedaen in 10000 daer na meerder seeckerheijt krijcht op de laetste letter dan deur de verdelinge in 1000.

BIJVOUGH DER

SINGCONST.

Cort begrijp deses

Bijvoughs.

I. Hooftstick.

Dat de everedenheijt der geluijden met haer lichamen, bij de Griecken niet recht getroffen en is.

Der Griecken singconstige spiegelingen worden aldus geseijt haren oirspronck genomen te hebben: Gaende Pythagoras langs de straet, voor bij een smits winckel alwaer met drie hamers op een ijser gesmeet wiert, hij hoorde daer in bij geval tgeluijt der achtste, vijfde, en vierde; waer mede hem in den sin quam die hamers te doen wegen, om te sien of haer gewichten mette geluijden eenige gemeenschap hadden, en bevant den grootsten van vier pont, de cleenste (die tegen de grootste de achtste maeckte) van 2 pont; De middelste (die tegen de grootste de vierde clanck en daerom tegen de cleenste de vijfde) van drie pondt; dat is anders geseijt den grootsten hamer tegen haer $^1/_2$ de achtste te maken, tegen haer $^2/_3$ de vijfde, tegen haer $^3/_4$ de vierde. Dergelijcke voorder besoeckende op *) speeltuygens gespannen snaren, bevant daerin het selve regel te houden, te weten dat de heele snaer tegen haer $^1/_2$ de achtste maeckte, tegen haer $^3/_4$ de vierde, en tegen haer $^2/_3$ de vijfde.

Maer soomen in plaets van dese vijfdens reden $^3/_2$ neemt getalen dient meeste 10000, t'ander valt ten naesten van 6667, want seggende 3 geeft 2, wat 10000? comt als boven 6667, sulcx dat der Griecken reden vande vijfde doet reden $\frac{10000}{6667}$ welcke soo weijnich verschilt vande bijcans ware reden $\frac{10000}{6675}$ beschreven int 4 voorstel dat de snaer eens speeltuijchs gedeelt in 1000 even deelen

*) *Instrumenta Musica.*

het clinckende stuck der vijfde moet na d'een en d'ander wijse tennaesten 667 deelen hebben, sulcx datse alleene verschillen in eenich gedeelte van een dier deelen, waer af bij tgehoor niet te oirdeelen en is; Ende dergelijcke cleen verschil, wort alzoo oock bevonden tusschen de vierde gemistens $^4/_3$ en de ware reden.

Nu want dese redens der vijfde van 2 tot 3 en der vierde van 3 tot 4 de ware redens soo seer na quamen, de Griecken hebben gemeent datse de warachtige waren, en daerop hun spiegeling gegront, om banden der halsen van speeltuijgen te leggen niet al tastende, maer na tgeene t'wesen inde natuer vereijschte. Tot desen eijnde hebbense aldus geseijt.

Vande achtens . . . . . reden $^2/_1$

Getrocken de vijfdens of drie enhalftoons . . . . reden $^3/_2$

Blijft de vierdens of twee en halfthoons . . . . reden $^4/_3$

Die getrocken vande drie en halfthoons reden $^3/_2$
tweede in d'oirden blijft des toons . . . . . reden $^9/_8$

Daertoe vergaert noch sulcke reden $^9/_8$
comt des tweethoons. . . . . reden $\frac{81}{64}$

Die getrocken vande twee en halfthoons reden
$^4/_3$ derde in d'oirden blijft des halftoons . . . reden $\frac{256}{243}$

Die getrocken van des thoons reden $^9/_8$ vierde
in d'oirden blijft nu voor des halftoons. . . . reden $\frac{2187}{2048}$

Maer angesien alle halfthoonen eve groot gesongen worden, soo behoorde dese laetste reden des halfthoons even te vallen met des anderen halfthoons reden $\frac{256}{243}$, twelck niet en gebeurt, maar doet reden $\frac{256}{240}$, want seggende 2187 geeft 2048 wat 256? comt in heel tal ten naesten 240 en heeft t'geluijt van deen halfthoon

een oirdeelelick verschil vant geluijt van d'ander, gemerckt de twee banden des grooten halftoons becans het vierendeel wijder van malcander commen te leggen dan de banden des cleenen halfthoons in reden $\frac{256}{243}$.

Nu dan uijt de voorgaende stelling der vijfdens reden $^3/_2$ niet volgende tgeene daer uijt behoort te commen, en noch te blijven seggen die stellinge goet te wesen, Ick ben noch vande meijning beschreven int 2e lidt der 6e bepaling vant je boeck des Eertclootschrifts, alwaer met ander omstandigen, welcke tot die plaets vereijscht wierden, geseijt is sulcx soo veel te sijn, als oft ijmant bekent waer vier pinten waters een stoop te maken, maer soo dickwils hij in een vadt twaelfmael een maet giet, die hij meent een pint te doen, soo dickwils bevint hij min dan drie stoop, sonder te weten, dat zijn genomen maet minder dan een pint moet wesen.

Nu dan ick sulcx voor openbaer dwalingh houdende, segh de vijfdens volcommen reden, als int 3e voorstel, te sijn van 2 tot $\sqrt{(12)}$ 32, want daer me voort gevaren, als boven d'een halftoon wort met d'ander na behooren evegroot bevonden elck in reden van 2 tot $\sqrt{(12)}$ 2048; besluijtende hier uijt gelijck t'voornemen was der Griecken everedenheijt niet wel getroffen te wesen.

Merckt.

Men soude benevens de breeder verclaring gedaen op d'oirsaeck der bovesz. dwalinge int 2e lidt der 6 bepaling van je boeck des Eertclootschrifts noch meugen dit seggen: Angesiender inde natuer geen ander getal en is, daer de

volcommen evenheijt deser twee halftoonen uijt volcht, dan voor de vijfdens reden te nemen 2 tot √ (12) 32, dats twee tot wortel of sijde der twaelfde grootheijt van 32, en dattet niet en schijnt der Griecken hun metter *) daet jn telling sulcker getalen geoeffent te hebben (hoewel van soodanige stof diepsinnige spiegelingen des wijsen tijts thaerder hant gecommen sijn, als blijckt in Euclides boecken) soo mochtmen vermoeden sulcx me een oirsaeck geweest te sijn, waer deur kennis der ware redens voor hemlien verborgen bleeft, wànt die niet en weten wat wortel of sijde der twaelfde grootheyt is, hoe soudense daer me het ware besluyt connen doen? Dit seg ick met verlof eenvoudelick na tgeene mij vande saken dunckt, soo ijmant daer af beter bescheyt wist, hij souder beter onderrichting af meugen doen.

II. Hooftstick.

Van der Griecken gemist oirdeel over cleene en groote derden en sesten met haer gedobbelden.

Angesien de Griecken vande goetheijt en quaetheijt der geluijden geoirdeelt hebben, uijt de getalen haerder redens, soo sal ick tot verclaringe van dien, hier voor t'eerste beschrijven de redens der geluijden daer t'geschil af is, te weten van cleene en groote derden en sesten met haer gedobbelden, volgens hun gemiste stellingh: tot welcken eijnde ick aldus segh:

---

*) *Praxi.*

Alsmen vande vierdens of twee enhalftoons reden $^4/_3$ treckt des toons reden $^9/_8$ blijft cleene derdens of anderhalftoons. . . . reden $\frac{32}{27}$

Tot des toons reden $^9/_8$ vergaert noch een toons reden $^9/_8$ comt de groote derdens of tweetoons. reden $\frac{81}{64}$

Totte vierdens reden $^4/_3$ vergaert de cleene derdens reden $\frac{32}{27}$ eerste in d'oirden comt de cleene sestens . . . . . reden $\frac{128}{81}$

Totte vierdens reden $^4/_3$ vergaert de groote derdens Reden $\frac{81}{64}$ tweede in d'oirden comt de groote sestens . . . . . Reden $\frac{27}{16}$

Totte cleene derdens Reden $\frac{32}{27}$ eerste in d'oirden vergaert de achtens reden $^2/_1$ comt de cleene tiendens of dobbel cleene derdens . . . . . reden $\frac{64}{27}$

Ende sgelijcx is de voortganck vant vinden der reden vande dobbel groote derde en van de dobbel sesten.

Nu dan de getalen der bovesz. redens dusdanich sijnde, wij sullen totte sake commen: Nadien de Griecken benevens de achtens waren reden $^1/_2$ oock voor recht hielden de vijfdens gemiste reden $^2/_3$, mette vierdens gemiste Reden $^3/_4$, jn welcke getalen men noch vint een oirdentlick vervolch van 1 tot 2, van 2 tot 3, van 3 tot 4, dit heeft hemlien

doen vermoeden en besluijten de natuer de saeck soo vervougt te hebben, dat de soetste of beste geluijden, de eenvoudichste cleenste getalen der palen haers redens hadden, oirdeelden hier uijt tgeluijt der achtste het soetste te zijn, wiens getalen der palen sijn de cleenste al 1 en 2, daer na dat der vijfde van 2 en 3, en ten laetsten dat der vierde van 3 en 4.

Angaende de geluijden der cleene derde, groote derde, cleene seste, groote seste, wiens getalen sijn als vooren $\frac{32}{27}$, $\frac{81}{64}$, $\frac{128}{81}$, $\frac{27}{16}$, die en conden seijden sij niet soet wesen, gemerkt sij grooter sijn dan $^9/_8$ der tweede, openbaer mishagelick sijnde: sulcx dat al de lieflicke geluijden van derden en sesten als quaet uyt haer sanck gebannen bleven. Waer inmen bij voorbeelt siet hoe uyt een toegelaten ongeschicktheijt veel dwalingen volgen.

D'oirsaeck waerom de *) Vinders des tegenwoordich gesancx dese fauten niet gevolcht en hebben, schijnt dat der Griecken spiegeling hemlien onbekent wesende, soo en sijnse deur het quaet besluijt op gemiste getalen gegront, niet verleijt geworden, dan hebben voor soet geoirdeelt tgeene sij uijtter nateur soet gevoelden.

III. Hoofstick.

Van der nieuwe Sangmeesters gemist oirdeel over de vierde met haer gedobbelde.

De vierde die bij de Griecken voor lieflick gehouden

---

*) *Inventeurs.*

wiert achten de *) Sangmakers deses tijts onbehaeghlic sulcx datmense in den †) tweeich liet ganslick niet en lijt, dan in meerstemmige wortse toegelaten, mits datmense tegen de leechste niet en hoort. Maer dit dwaling te wesen, wort int cort aldus verclaert: Tgebeurt gemeenlick dat oude lieden met jonge kinderen t'samen eenich liet in een selve thoon singende, daer toe uijtter nateur stemmen gebruijcken, diese meynen even hooch te wesen, en nochtans een achtste of somwijlen wel twee achtsten verschillen: Inder vougen dat tusschen die twee geluijden soodanigen gelijckheyt is, al oft bijcans selfheijt waer. Hier uijt soudemen meugen besluijten dat een derde stemme met een vandien behaechlick sijnde, met d'ander niet mishagelick en can wesen. Als bij voorbeelt, die derde stemme onder des kindts stemme een behaechelicke vijfde makende, en can tegen d'ander leeghste, daerse een vierde tegen valt, niet mishagelick wesen; want na de gemeene regel soo hebben twee gelijcke saecken tot een derde gelijcke reden. Maer want hier me de nagel noch niet volcommelick opt hooft getroffen en schijnt, wij sullen naerder commen: Tot welcken eijnde ick andermael segh, de gelijckheijt vande twee geluijden der achtste soo groot te wesen, datse niet alleen de bovesz. onervarene der singconst onsekerlick doet oirdelen, maer dat sulcx oock de ervarenste gebeuren can, voornamelick wanneer twee geluijden van verscheijden afcomsten, als snarenclanck tegen menschen stemmen, of tegen geblasen tuych als fleuten, cromhoorens, trompetten, schalmeijen en diergelijcken, diemen metter daet wel t'samen gebruijckt, waer me voor de scherpsinnichste dickwils onseker is, ofse

*) *Componistas.*

†) *Duo.*

een achtste schillen of in een selve hooghde sijn. En die hier af proeve wil doen, macht metter daet versoecken, want hij niet alleen verscheijdener menschen vonnis verscheyden en sal vinden, maer oock sijn eygen onseker te gaen, hem sulcke twee geluyden d'eenmael dunckende een achtste te schillen die hij daer na op een ander tijt houden sal van een selve hoochde te zijn.

Dit dus wesende genomen, dat ghij alsoo oirdelende, twee geluijden in een selve hoochde te sijn, t'een neem ick van een snaer, t'ander van een fleute, soo ister een derde hooger, Ick neem van een trompet makende na u goetduncken tegen elck van d'ander twee een vijfde: Maer op een ander tijt oordeelt ghij t'een dier twee eerste geluijden niet even hooch te wesen alsvooren, dan de snaer een achtste hooger te commen dan de fleute, waer uyt volght dat de fleute, na dit tweede oirdeel, tegen het bovesz. derde geluijt, dats tegen het trompet, dan onbehagelicke vierde sal maken; Maer ghij hebt eerst geseijt dattet een behagelicke vijfde was, daerom, ghij u selven tegenspreeckende, soo en ist geen wonder een ander met u niet te connen over een commen: Merckt noch dat van dese gemiste stof der vierde deur Andries Papus een besonder handel beschreven is, bij hem genoemt *Pro Dialebaron.*

Angaende jmant nu vragen mocht hoe sulcken gemist besluijt soo lange dueren can, en voor recht gehouden worden bij alleman op soo grooten deel des Eertbodems als daermen tegenwoordelick sulck gesanck gebruyckt; Men soude hier op meugen antwoorden der Griecken gelycken geval te meugen tot voorbeelt dienen, welcke nadiense missende

de twee soete derden en sesten oirdeelden mishagelick te wesen, tegen tgemeen gevoelen der sangers deses tijts, soo deedet d'eenen mensch den anderen deur overstemming geloven, en hadder ijmant tegen gewilt men soude hem metten cortsten geseijt hebben, de gemeene spreuck *De const en heeft geen viant dan den onwetenden.* Ende hoewel ick oock dergelijcke op dese voorstaning der vierde verwachte, soo gevoel ick mij sulcx minder verdriet te sullen andoen dan verborgen te houden, tgeene ick hier of geloof de waerheijt te wesen.

IIII. Hoofstick.

Inhoudende des Schrijvers gevoelen vande gedaente des gesancx der Ouden.

Want ons voornemen is wat te seggen vande gedaente des gesancx der ouden, en dat de selve ouden verscheijden en driederleij sijn, sullen eerst verclaren om tbedroch der lijcknoeming te schuwen, van welcke soorten der drie wij hier spreecken. Deerste sijn die Moises, Berosius ende Josephus vermanen, d'ander de Griecken met haer navolgers de Romeynen daer Euclides, Ptolomeus, Vitruvius en Boetius af schrijven. De laetste die vinders en eerste oprechters geweest sijn vande gesanck diemen nu ter tijt gebruijckt als Josquin du Pres, zijn meester Jan Ockegens etz.

Vande gedaente des gesancx der eerste en laetste ouden

en valt hier geen verschil, overmits ons d'eene gansch onbekent is, d'ander, om haer nieuheijt, teemael openbaer. Maer de middelste, daer twijffel af is, van dese sullen wij wat handelen.

Angesien hier vooren genouchsaem bewesen is der ouden valschen gront en dwalingen inde singconst, soo mocht nu ijmant dencken, hoe dat sommige personen daer deur soo seer hebben connen beweecht worden, gelyckmen leest van Alexander dat hij etz.

Ick seg d'oirsaeck van desen de cracht des vermoedens geweest te hebben, welcke even soo wel int valsche als int warachtige, den selfde daet werckt; neemt voorbeelt an etz.

Alsoo oock doen sij in een vast gelooft quamen, de ware reden der vijfde te wesen van 3 tot 2, al wat daer uijt volchde, tmocht sijn soot wilde, sij hieldent voor eygen en volmaeckt, ontfangende aldus met een besloten gemoet in de mishagelickheijt een welbehagen: Maar om dit noch opentlicker te bewijsen, soo laet ons nemen onpartijdich volck diens tijts, welck onverleijt deur valche beginselen gelijck d'ander, de natuer plaets gaven, als de gemeente tot Athē. Voor welcke een leerlinck van Antigenidas spelende, etz.

Maer wie sal dese gemeente ongelijck geven, soomen merckt op de twee ongeschickte geslachten des gesancx, als haer *Chromaticum* en *Harmonicum* waren; Om welcker gedaente te verclaren soo laet AB de sanglijn beteijckenen gedeelt in etz.

Sgelijcx sij *AB* een sanglijn gedeelt in etz.

Wildi nu weten hoedanich *Genus Chromaticum* was, soo

neemt een luijt, verschuijvende haer banden alsoo, datse lijckformich liggen met de deeling der lijn AB, daer over een snaer spannende. Nu genomen dat ijmant op dese snaer eenich eenstemmich liet speelt, rijsende ende dalende nade banden dieder opstaen, denckt (soot u t'onpas quam te hooren) wat een lieflick cattengemaeu daer op can gemaeckt worden: Maer t'sij hoet wil die sijn stem met sulcke trappen dede climmen en dalen, sijn gesanck heet *Genus Chromaticum.* Ende diergelijcke is oock te verstaen van het *Genus harmonicum*: geslachten voorwaer gelijck haer gront: Wiens gedaenten wij voorgenomen hadden te verclaren, om eijntlick ons voornemen te besluijten, te weten dat sij deur een onbeweechelic vermoeden, daer hun schijn van waerheyt toe brocht, het onbehaechlick voor bevallich geacht hebben.

V. Hoofstick.

Vant gemeen onderscheijt tusschen de gesanck diemen noemt *Bemollaris* ende *Beduralis.*

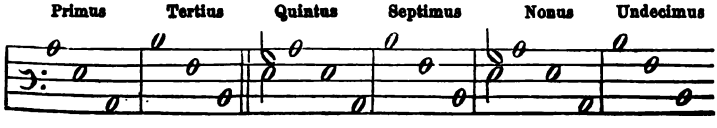
Tgemeen onderscheijt datmen maeckt tusschen de gesanck diemen noemt *Bemollaris* end *Beduralis* is onnut, ende eijgentlick geen onderscheijt, maer al deselfde: Want geeft de C sol fa ut sleutel in Bemol, den naem van G sol re ut, beduyer daer singende, ghij hebt al de selfde gesanck die in Bemol was. Tselve heeft hem alzoo

gevende de sleutel van F fa ut Bemol, den naem van C sol fa ut Bedeur; Sgelijcx de sleutel G sol re ut Bemol den naem van D la sol re beduijer: Ofte geeft ter contrarie alle dese den naem van die, ende hebt al t'selfde. Ten is dan geen ander aert van gesanck als d'ander en vervolgens soo ist een onut, [lees: onnut] onderscheijt.

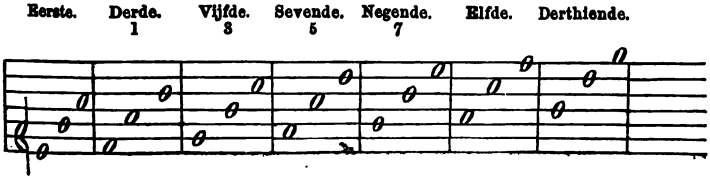
Dit volgende is dubbelt van een brief bij mijn Vader zal: an ijmant geschreven.

Alsoo ick van meijninge was met Meester Davidt te spreken van Sarlijns twaelf thoonen, soo verschreef ick de noten na mijn manier, om hem te bethoonen dattet twaelf waren, Maer alsoo ick vorder meende te bewijsen datter niet meer sijn en conden, bevant ter contrarie datter veertien waren: welck bewijs ick u hier sende. Dus wilt mij uijt den droom helpen, of u selven daer in brengen.

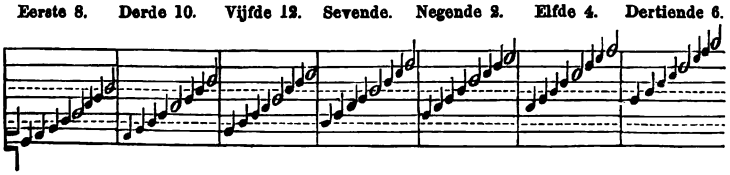
Sarlijns ses thoonen (die met haer contrarie twaelf souden maken) sijn, soo ghijse mij sendt, dusdanich.



Dese stel ick na mijn manier (daer bij vougende de sevende anders de dertiende) aldus



Nu ist kennelick dat uijt de verscheijden plaetsen der halftoonen, onderscheijt wort de verscheijden aert van gesanc diemen verscheijden thoonen noemt. Daerom make ick seven gelijcke fugen in elcken toon een, als hier onder: Mette getippelte trappen beteecken ick tot meerder claerheijt, de plaetsen die op haer voorgaende note halfthoonen maken.



4e 8e De selve segh ick altemael verscheijden te wezen: twelck ick aldus bewijse:

3e.7e. T'verschil vande derde toon met d'eerste is, dat die haer derde en sevende note halfthoonen heeft dese heeltoonen.

2e.6e. T'verschil vande vijfde toon met de twee voorgaende is, dat die haer tweede en seste noten halftoonen heeft dese heelthoonen.

5e.8e. T'verschil vande sevende mette drie voorgaende is, dat die haer vijfde note halfthoon heeft dese heelthoonen; Voorts dat die haer achste note halfthoon heeft, maer de derde en vijfde hebbense heeltoonen.

4e.7e. T'verschil vande negende toon met de derde vijfde en sevende is, dat die haer vierde note halftoon heeft, maer dese hebbense heeltoonen; Voort dat die haer sevende note halftoon heeft, maer d'eerste vijfde en sevende hebbense heeltoonen.

3e. 6e. T'verschil vande elfde toon met d'eerste, vyfde, sevende en negende is, dat die haer derde note halftoon heeft, dese heeltoonen; Voort dat die haer seste note halftoon heeft, maer de voorgaende eerste, derde, sevende, en negende, hebbense heeltoonen.

2e. 5e. T'verschil vande dertiende toon met d'eerste, derde, sevende, negende en elfde is, dat die haer tweede note halftoon heeft, dese heeltoon: Voort dat die haer vijfde note halftoon heeft, maer d'eerste, derde, vijfde, negende en elfde hebbense heeltoon.

Dese toonen met haer contrarien (welcke contrarien ick om cortheijt achter laet) maecken veerthien toonen, en niet meer en cander wesen, want d'eerstvolgende, twelcke in d'oirden de vijftiende waer, soude sijn als d'eerste, twelck ick bewijsen wilde.

DE

SPIEGELING DER

SINGCONST

Beschreven duer

DE
SPIEGHELING DER SINGCONST,

BEPALINGHEN.

1e *Bepaling.*

Trap is de naeste vervolghende climming diemen inde nateurlicke sanck rijst wiens minste stemming cleentrap geheeten wort de meeste groote trap.

2e *Bepaling.*

Nateurlicke sanck is, die deur oirdentlicke climming aldus gheschiet: Twee groote trappen een cleene drie groote een cleene twee groote een cleene drie groote een cleene. Ende soo overhandt oirdentlick voort.

Verclaring.

Anghesien dat de leeck luijden sonder kennis vant onderscheyt tusschen halve ende heele trappen door nateurlicke gheneghenheijt sulcken voortganck ghebruyken soo wortse met goede reden nateurlicke sanck ghenoemt want 2 of 3 halve trappen ofte 4 of 5 heele trappen vervolghens achter malcander te singhen en is niet alleen moeyelick om doen maer oock int anhooren onbehaghelick ende als onnateurlick.

3e *Bepaling.*

Dese seven trappen na de nateurlick gesanck oirdentlick climmende maken des ghesanckx een ommeganck.

Verclaring.

Wanneermen boven een ghestelde toon seven trappen rijst met oirdentlick climming soo heeft het laetste gheluijt sulcken ghelyckheijt mettet eerste dattet schijnt al ofmen een ommeganck ghedaen hadde ende wederom quaem daermen begosten: Inder voughen datmen sulcx van weghen die ghelyckheyt ommeganck heet: Welck ghenouchsaem toegaet als inde Sterreconst met de slangkeeren, die de Maen duer haer ghevalligh roersel daghelicx beschryft welcke eyghentlick gheen evewijdighe ronden sijnde nochtans om de ghelijckheyts wille alsoo ghenoemt worden.

4e *Bepaling.*

Die seven trappen worden elck aldus ghenoemt, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, wiens trappen van *mi* tot *fa* ende van *la* tot *si* cleen sijn dander al groot.

5e *Bepaling.*

Twee gheluyden even hooch sijnde hun verlycking wert selftoon ghenoemt. Maer een cleen trap verschillende half toon Een groote trap verschillende toon: Een groote met een cleene verschillende anderhalftoon: Twee groote verschillende tweetoon. Ende soo oirdentlick voort.

6e *Bepaling.*

Twee gheluyden even hooch sijnde haer verlycking wert oock eerste ghenoemt maer een trap verschillende tweede welcke trap cleyner sijnde heet eyghentlick cleene tweede groot wesende groote tweede: Ghelijcx twee trappen verschillende wort derde gheheijten welcke een cleene sijnde heet cleene derde maer van twee grooter, groote derde ende soovoort tot

de sevende wiens volghende trappen dobbeleerst dobbeltweede heeten ende soo oirdentlick voort met de eenvoudiche eerste tweede ende haer volghende.

Verclaring.

Desinghelickeghelujden ontfanghen twee verscheyden manieren van namen ghelyckse inde voorgaende 5e ende 6e bepalinghen beschreven sijn die elck haer besonder ghebruijck hebben. Want wesende de redens der gheluijden te vergaren ofte van malcander te trecken men noemtse bequamelicker duer de namen der toonen overmidts dat totten tweethoon vergaert den drietoon haer somme is den vyftoon; treckende den tweetoon vanden drie enhalftoon blyft de onderhalftoon inder voughen dat sommen en resten namen der ghetalen cryghen lijckformich an heur sij sijn. De namen van eersten tweeden derden dus sijn bequamer om int dadelick *) maecksel des sancx te ghebruycken. Want lichter ende bequamelicker telt men tverschil van twee gheluyden deur trappen na de nateurlicke ghesanck climmende of dalende dan deur toonen en halftoonen overmits de menichte der trappen met de menichte der toonen niet en overcomt.

Begheerte.

Wij begheeren toeghelaten te werden dat ghelijck snaersdeel tot snaersdeel also haerder gheluyden grofheyt tot grofheyt.

Verclaring.

Wanneer twee persoonen tsamen een dobbel eerste singhen de grover stem des leegsten heeft een ghelaet van dobbelheijt teghen de fine stem des hoochsten: dat is

*) *Compositione cantus.*

ghelijck 2 ellen dobbel sijn teghen 1 elle alsoo schijnt dese leegste stem in grofheijt dobbel te wesen ande hoochste: Tis wel waer dat de selve dobbelheijt ons int gheluijt niet soo heel claer ende verstaenlick en ontmoet als in grootheijt ghetal ghewicht tijt roersel, ende meer ander: nochtans soo beweeght ons de ghespannen snaer selve toete laten overmits haer deelen in dobbel reden der grootheijt sijnde de selve gheluyden clijncken die wij segghen van dobbel reden der grofheijt te wesen. Want de heel snaer teghen haer helft clincken tsamen de voorschreven dobbel eerste. Voort ghelyck hier gheseyt is, dat de heele snaer tot haer helft in dobbel reden der grootheijt sijnde, haer gheluyt in dobbel reden der grofheijt heeft, alsoo is oock te verstaen dat de heele snaer tot haer vierendeel in verhoudinghe reden der grootheijt wesende haer gheluijt in verhoudinghe reden der grofheyt heeft ende alsoo voort met allen anderen soo wel deelen teghen malcander als deelen teghen de heele snaer. — Nu alsoo ymant mocht willen ontkennen den helft der snaer teghen de heele een dobbel eerste te clijncken, daer uyt oock niet toestaende der gheluyden grofheijt te wesen inde reden van haer snaersdeelen soo wort hier boven beschreven welcke toeghelaten te worden overmidts sulcx als beghinsel gheen ander bewijs en verreyscht. Want ghelijck de ervaring leert, soo en ghebeurt de contrari niet dan deur valsche snaren oft ander ongheval.

2e *Begheerte.*

Heele toonen al even groot te wesen, dat sgelijcx oock halve toonen al even groot sijn.

Verclaring.

De sin is dese datmen van *ut* tot *re* even soo veel ryst als van *re* tot *mij* ende als van *fa* tot *sol*, van *sol* tot *la* ende van *sa* tot *ut*. Datmen desgelijcx eerst van *mij* tot *fa* even soo hooch rijst als van *la* tot *sa*.

	Vertooch.			*Voorstel.*
Ghelyck 1 tot	1	Also den eenen toon tot den anderen	Selftoon	Eerste
	$\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{2}$		Halftoon	Cleen tweede
	$\sqrt{}$ (6) $\frac{1}{2}$		Toon	Groote tweede
	$\sqrt{}$ (4) $\frac{1}{2}$		Onderhalftoon	Cleen derde
	$\sqrt{}$ (3) $\frac{1}{2}$		Tweetoon	Groote derde
	$\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{32}$		Twee en halftoon	Vierde
	$\sqrt{}$ $\frac{1}{2}$		Drietoon	qua groote vierde of qua cleene vijfde
	$\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{128}$		Drie en halftoon	Vijfde
	$\sqrt{}$ (3) $\frac{1}{4}$		Viertoon	Cleen seste
	$\sqrt{}$ (4) $\frac{1}{8}$		Vier en halftoon	Groote seste
	$\sqrt{}$ (6) $\frac{1}{32}$		Vijftoon	Cleen sevende
	$\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{2048}$		Vijf en halftoon	Groote sevende
	$\frac{1}{2}$		Sestoon	Dobbeleerste.

Bewijs.

[abest]

Vande Reden int ghemeen.

Want de redens inde stof des gheluijdts niet soo opentlick bekent en sijn als in ander stoffen daer sij ons ontmoeten, sullen om meerder claerheyt eerst segghen vande Redens ende Everedenheyt int gheluiden; daer nae vande ghedaente des redens der Singconst duer haer verlijcking met de bekende reden der meetconst,

Ende ten laetsten van d'eijghen redens der singhelicke gheluyden. Reden dan int ghemeen bepaelt, is tselver stoffen verlyckingh na de menichvuldenheyt. Als in ghetalen grootheyt, ghewichten, tijt; 6, 6 voeten, 6 pont, 6 uijren, sijn in dobbel reden tot 3, 3 voeten, 3 pont, 3 uijren. D'Everedenheyt is de verlyckinge van twee even redens als 6 tot 3 is een dobbel reden, alsoo oock is 8 tot 4, daerom de reden van 6 tot 3 is even ander reden van 8 tot 4. tsijn dan even redens ende haer verlycking segghende ghelyck 6 tot 3 alsoo 8 tot 4, is everedenheijt ofte 6, 3, 8, 4, sijn everednighe palen.

Siet hier duytsche woorden licht om verstaen ende van slecht ghelaet maer eyghentlick van oneindelick vermueghen. Want soomen ansiet het bepaelde te weten Everedenheijt tis als bepaling sijns grondts, wiens gheluijt alleen, int eerste anhooren ons vermaent ende anwijst dattet recht grontlick verstandt der Everedenheyt byde Griecken ende hun navolghers niet gheweest en heeft. Want (veel ander ghelaten die elders te pas sullen comen) te segghen dat 6, 4, 3 van drie ghelycke singconstighe everedenheyt maecken daer oneindelycke ydelheden uijt volghen ende besloten worden; Men antwoort duer beweghing van tvoornoemde gheluijt, hier van sijn gheen even redens, daerom oock gheen Everedenheyt. Doirsaeck dier dwalinghen is dat hun spraeck dit woort medtsgaders al d'ander Wisconstighe namen niet soo eyghentlick beteeckenen en conden als dese daerom soomen met goet onderscheyt van der talen nutbaerheijt

wilde spreken; men mocht segghen de wetenschap van Griecx oirboir te wesen van veel verscheijden vonden der Griecken die thaerder tyt de voornaemste waren int licht te brenghen, duer oversetting uyt het Griecx in ander talen: sgelijckx daeghelicx ghebeurt; Tlatijn om daer mede (als bij ghevalle des werrelts ghemeen tael gheworden synde) in alle landen verstaen te worden, oock om alle konsten te mueghen besien, die van alle stoffen bij verscheijden geslachten van volcken daerin beschreven worden; Tfranszois Italiaens Spaens Pools, etz. om sijn handel daer deur te dryven yder nae sijn ghelegenheyt. Maer het DUYTSCH om de vrie consten daer in te leeren, om de natuerens verborghentheden daer in duergronden ende te bewysen dat wonder gheen wonder en is. Daerom hij die van meyningh waer na de groote Wysheyt te trachten daer der Caldeen ende Egyptenaeren wetenschappen eertijts overblijfselen af waeren, hem soude nut sijn tot desen born oft eerste oirspronck te gaen van daer sijse gekreghen hadden vlietelick in Duytsch leerende onder anderen wat de voornoemde Everedenheyt is. Want dit gheluyt beeldet wesen van dese groote saeck eyghentlick uijt andre woorden als *Proportio Analogia*, synder onbequaem toe ghelyck de daet tot verscheyden plaatsen claerlick betuycht.

Verlijcking der Meetconstighe Reden met de Sinconstighe.

Tot hier toe is vande Redens int gheluiden gheseyt maer om nu nae tvoornemen duer verlijcking der

meetconstighe Reden die der Singconst te verclaren soo is te weten dat ghelyck de Meetconstighe Reden bestaet in der formen grootheyt ende cleenheyt welcke afghemeten wort duer langhde, alsoo de Singconstens Reden in der gheluyden grofheyt en fynheyt, die afghemeten wort duer hoochde of leechde: Als twee singhende een dobbeleerste, men seght uyt sulck verschil der leechde die deen onder dander is de grofste stem dobbel onder finste. Ende sulcke stof der dobbelheyt als dit is vande selve sijn al d'ander meerder ende minder singconstighe Redens. Wederom ghelyckmen alle Redens van twee voorghestelde rechtlinighe platten of lichamen duer tghesicht niet bekennen en can, maer hun meetconstighe reghels hebben, leerende hoemen die vinden sal, alsoo en sijn alle Redens van twee voorghestelde gheluyden uyt het ghehoor niet te oirdeelen, maer sij worden openbaer duer haer Sinconstighe reghels daer wij nu af segghen moeten.

Vande Redens der singchelicke gheluyden na der Griecken meining.

D'ervaring betuycht dat de gespannen snaer op eenich reetschap als luyt cyter viool of derghelycke teghen haer helft een gheluyt maeckt daer mede soo seer ghelyck dattet in hem een ghelaet van selfheyt heeft diens Reden der grofheyt wij duer eenighe natuerlicke gheneghentheyt dobbel verstaen maer niet soo wesentlick als de dobbelheyt die ons in ander stoffen ontmoet, ghelyck

vooren gheseyt is, doch soo wort sulcx merckelicker bevesticht duer de lichamen dese gheluijden uijtende als der heelsnaer ende haer helft, welcke oock in dobbel reden sijn. Tselve heeft hem alsoo met de halfsnaer tot huer vierendeel, achtendeel, sesttiendendeel ende d'ander in die voortganck. Want alsulcke gheluyden al tvoornoemde ghelaet der selfheyt hebben, met begrijpelicke ghedaente der viervoudighe achtvoudighe, sesthienvoudighe Reden der grofheijt. Desgelycs is oock openbaer in al dander redens buyten den boveschreven voortganck. Want nemende een deel des snaers wiens Reden tot de heele den helft sij des Redens vande dobbelden haer gheluyt sal oock tot halfweghe duer oirdeelick leeghde ghedaelt sijn: Maer want dese bekende daling de maet der grofheyt is ghelyck wij vooren gheseyt hebben, soo is ons de Reden der grofheijt hier bekent, ende alsoo met anderen dier ghelycken waer uijt besloten wort dat ghelyck dit snaersdeel tot dat snaersdeel, alsoo desens gheluyt tot diesens gheluyt, dat is de snaersdeelen brenghen gheluyden voort inde Reden haerder grootheden. Dit eertyts bemerckt sijnde, soo was de drangh na de ware deeling des snaers alsoo datse de eijghentlicke toonen begrepen die wij duer natuerlick ghesanck synghen. twelck de Griecken tot onderscheyt van tgheen sij *Chromaticum* ende *Harmonicum* heeten, *Diatonicum genus* noemen, op dat alsoo tnatuerlick ghesanck inde singconstighe reetschappen volcomelick

ghetroffen wierden. Om hier toe te commen soo en behouftmen maer eenich toon den halftoon vervatende als onderhalftoon, tweeenhalftoon, drieenhalftoon enz. wantmen daer uijt om der Redens vergaring ende aftrecking wil, al de rest gewislick vinden can sonder meer gheluyden te hooren. Sij hebben daer toe ghenomen de vyfde, dat is den drieenhalftoon ende vinden de ware Reden der langde des snaers ende haers deels desen drieenhalftoon clijnckende seer naer in de Reden van 3 tot 2 hebben gheschat Reden $^3/_2$ de warachtiche te wesen. daermede voortgaende als of syt waer treckense van Reden $^2/_1$ des sestoons blyft Reden $^4/_3$ des tweeenhalftoons, de selve van Reden $^3/_2$ des drieenhalftoons blijft reden $^9/_8$ voor den toon, daer toe vergaert noch een reden $^9/_8$ comt Reden $\frac{81}{64}$ des tweetoons de selve getrocken van Reden $^4/_3$ des tweeenhalftoons blyft voor den halftoon Reden $\frac{256}{243}$, etz. Maer alsmen de sanglijn ofte om werckelicker te spreken, den hals van een luyt of cyter deelt na de boveschreven Redens d'ervaring betuycht opentlick duer tghehoir sulcx den halftoon niet te wesen want sij veel te cleen is. Indervoughe dat de natuerlicke toonen duer sulcke deeling niet recht ghetroffen en sijn. Ende hoewel d'ouden dit ghenomen merckten hebben nochtans dese deeling voor goedt ende volmaeckt ghehouden ende liever tghebreck (ghelyck oftmen seyde de Son mach lieghen maer tuijrwerck niet) in ons ghesanck gheacht; ja hebben hierom de soete ende lieflicke gheluijden der cleene ende groote derde en

sesten, welcke in haer misdeelde sanglijn mishaeghlick clancken voor quaet ghehouden, te meer dat een sinlicheijt van oneyghen ghetalen hun hier toe drang. Maer willende Ptolemeus daer naer dese onvolmaectheijt verbeteren heeft tvoornoemde *genus diatonicum* op een ander wyse ghedeelt makende onderscheijt tusschen groote toon in Reden $\frac{9}{8}$ ende cleene toon in Reden $\frac{10}{9}$ welck verschil inde natuer niet en bestaet wantet openbaer is alle heele toonen evegroot ghesonghen te worden. Dese onghetroffen toonen an Zarlinus niet ghevallende heeft noch een ander deeling ghemaeckt verspreydende seker *comma* (in Ptolemeus deeling overschietende) op deen en dander toon daert hem goet docht maer al tastende. Alle dese dwalinghen sijn daer uyt ghesproten dat den aert der everedenheijt niet grontlick ghenomen begrepen en heeft gheweest twelck niet en quam duer ghebreck des verstants want hun naeghelaten daden ghenouch betuyghen datse van d'alder scherpsinnichsten waren die de natuer voortbrenght maer tlooch hun an goede reetschap naemlick de duytsche tael sonder welcke men inde diepsinnichste saecken soo weijnich doen can als een ervaren timmerman sonder goede verstaelde reetschappen sijn ambacht want ghelyck men duer een ongheschickt cromlinighe form de meetconstighe eygenschappen des viercants niet soo duergronden en can als met een eyghen viercante form na den vyften des 4 voorstels wiens gheduerich opsicht gheduerich tghedacht versterckt alsoo en condemen de diepsinnichste natuerens

verborghentheden duer dongheschickte (bij Duytsch verleken) Griecksche spraeck niet soo grontlick begrypen als duer dese aldergheschickste ende aldervolmaeckste tael der talen wiens eijghentlicke beteeckening ons tbeteeckende soo claerlick inbeelt dat de saeck self daer duer ghedueric voor ooghen schijnt welcke in dander talen onbegrijpelicke duysterheden blijven soo dervaring onder anderen in dese stof overvloedelick betuijcht. Want Reden $^3/_2$ voor de vyfde te stellen, daer mede na den vyften voortgaende ende eintlick niet wel uijtcommende noch te meijnen dat Reden $^3/_2$ de waerachtighe sij, voorwaer de grontlicke aert der vergaring ende aftrecking vande Redens isster onbekent. Maer op dat wij dit misverstant in d'onverstaen aert der Redens duer verlijcking van verstaenlicken gheluiden ghetalen openbaer maken: laet ons nemen eenich ghetal als 110 inde plaets des sesthoons, ende vyf persoonen, A, B, C, D, E, oirdentlick beteeckenende den drieenhalftoon tweeenhalftoon, toon, tweetoon ende halftoon, daer mede den eysch stellende lyckformich ande voorgaende Pitagorische wercking des Redens aldus: Van 110 ghetrocken tghene A hebben moet de rest is voor B, ende ghetrocken B van A t'overschot is voor C, daer toe noch soo veel ghedaen de somme is voor D, die ghetrocken van B toverblijfsel moet 35 sijn voor E. Ymant om tot besluyt van desen te commen, neemt een ghetal voor A dat hem soo

veel tuyterlick ghevoel belanght na ghenouch dunckt als 60, hier mede voortgaende als oftet twaerachtich waer, trecket van 110 blyft 50 voor B, die ghetrocken vande 60 rest 10 voor C, daer toe ghedaen noch 10 vint 20 voor D, die ghetrocken van 50 der B blyft 30 voor E, maer E moest 35 hebben hij siet dan opentlick dat E tsijne niet en heeft; doch sonder te mercken dat sulcx comt uijt het eerste ghetal voor A dats 60 onrecht ghestelt te wesen acht dat laetste ongheval de naturens verborchenheijt houdende sijn boveschreven besluyt voor goet. Maer wat sal den ervaren Telder hier toe segghen? seker met goede reden dat soodanighen deyghenschappen der Telconst niet ghenough bekent en sijn, wetende dattet recht deel voor A 59 is, twelck van 110 ghetrocken blyft 51 voor B, welcke van 59 rest 8 voor C, daer toe noch 8 comt 16 voor D, die ghetrocken van 51 der B blyft 35 voor E naer tbegheerde. Even eens ist inde berekening vande Redens der gheluyden toegeghaen, want wesende voor de vyfde een Redens te stellen, die na seecker reghel af te trecken ende te vergaren was, alsoo datter eintlick de ware Reden des halftoons overschiete welcke men duert stellen van Reden $^3/_2$ daetlick bevandt daer niet uijt te commen, ende bevandt noch gheduerlick te blyven meijnen dat die Reden $^3/_2$ de waerachtighe is; Voorwaer soo opentlick als den Telder hier boven sach dat den stelder van

60 voor A de Telconst niet ghenouch en verstont naestelick ghevoelende doirsaeck sijnder dwaling; even soo claerlick siet den ervaren der Everedenheijt dese stelders van Reden $^3/_2$ voor de vyfde den grontlicken aert der Redens end Everedenheyts niet innerlick ghenomen begrepen te hebben spruijtende daer uijt als voor gheseyt is dat sij gheen woorden en hadden die de Wisconstighe saken soo eyghentlick beteeckenen conden als het DUYTSCH.

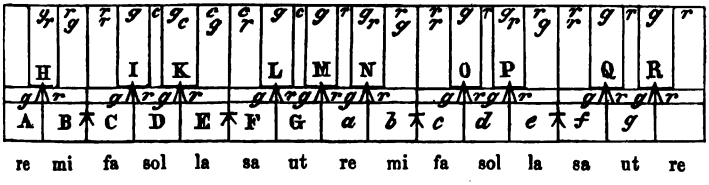
Vande ware redens der natuerlicke toonen.

Maer om tot de saeck te commen ende deyghen Redens der natuerlicke toonen te beschryven, soo segh ick dat de ware reden der vyfden ofte des drieenhalftoons is van 1 tot $\sqrt{(12)}\ \frac{1}{128}$, dat is van 1 tot syde der twelfde grootheyt van $\frac{1}{128}$, de selve ghetrocken van Reden. $\frac{2}{1}$ des sestoons blyft Reden van 1 tot $\sqrt{(12)}\ \frac{1}{32}$ voor den tweeenhalftoon, die wederom ghetrocken vande voornoemde Reden des drieenhalftoons blijft Reden van 1 tot $\sqrt{(6)}\ \frac{1}{2}$ voor den toon, daer toe ghedaen noch alsulcken reden comt Reden van 1 tot $\sqrt{(3)}\ \frac{1}{2}$ voor den tweetoon, de selve ghetrocken vande boveschreven Reden des tweeenhalftoons blyft reden van 1 tot $\sqrt{(12)}\ \frac{1}{2}$ voor den *) halftoon. Om twelck te bewysen soo laet A, B, C, D, E, F, G, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, beteeckenen de clawieren van een orgel ofte clavesingel ende H I K L M N O P Q R de tusschen toonen diese

*) Om twelck te bewijsen, soo is te weten dat alsmen syngt (soot derghelicken noemen) *gis* teghen *dis* opwaert als onder anderen Orlando en etc., tzelfde hooren wij een goede vyfde te wesen.

fenten noemen, Want ons dit reetschap tottet voornemen bequamer is, dan de sanglijn, tselve laet ghestelt worden met de volmaeckte natuerlicke toonen in deser voughen

Boven F de dobbeleerste *f* met de vijfde *c* tusschen beyden
Onder *c* de dobbeleerste C met de vijfde G tusschen beyden
Boven G de dobbeleerste *g* met de vijfde *d* tusschen beyden
Onder *d* de dobbeleerste D met de vijfde *a* tusschen beyden
Onder *a* de dobbeleerste A met de vijfde E tusschen beyden
Boven E de dobbeleerste *e* met de vijfde *b* tusschen beyden
Onder *b* de dobbeleerste B met de vijfde L tusschen beyden
Boven L de dobbeleerste Q met de vijfde O tusschen beyden
Onder O de dobbeleerste I met de vijfde M tusschen beyden
Boven M de dobbeleerste R met de vijfde P tusschen beyden
Onder P de dobbeleerste K met de vijfde N tusschen beyden
Onder N de dobbeleerste H



Dit soo wesende dervaring betuycht dat HF een volmaeckte vyfde maken, ende hoewel sulcx voor ghemeen ende ghewisse Reghel gehouden wort van al de ghene hun dies verstaende, heb nochtans tot meerder versekering voor de ghene die daer an twijfelen mocht de Loofweerdicheyt willen ghebruijcken van.....

Wesende dan HF een volmaeckte vijfde, soo syn alle halftoonen nootsaecklick evegroot ende den rechten helft des toons twelck aldus bewesen wort: Laet den halftoon van B tot C ende van E tot F cleynder oft grooter syn, waert mueghelick dan den rechten helft des toons; ick neem na de Pitagorische meining cleender, twelck wij daerom (metgaders *bc* ende *ef*) teyckenen met *r* clein bediende, duer tlettercken *g* salmen groot halftoon verstaen: Om dan voort te gaen LB is duer de stelling een vijfde bestaende uijt drie toonen ende een cleen halftoon, ofte dattet selve is uyt twee toonen, twee cleene halftoonen met een groot halftoon; Dit soo synde van F tot L is een groot halftoon twelck aldus bewesen wort. BC is een cleen halftoon CD ende DE elck een toon, EF een cleen halftoon maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen, soo moet dan FL tot voldoening der vyfde BL een groot halftoon sijn, ende vervolghens van L tot G is een cleen halftoon want van F tot G is een toon daer af ghetrocken de groot halftoon van F tot L soo moet dan L tot G een clein halftoon sijn. Maer *f* Q *g* sijn dobbeleersten met F L G daerom oock ist van *f* tot Q een groot halftoon ende van Q tot *g* een cleen halftoon. Voort soo is O een vyfde op L. duer de stelling daerom oock ist van *c* tot O een groot halftoon twelck aldus bethoont wort: L G is een cleen halftoon, G *b* twee toonen, *b c* een cleen halftoon, maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen soo moet dan *c* O tot voldoening der vijfde L O een groote halftoon sijn, ende vervolghens soo is O *d* een cleen halftoon. Maer C I D sijn dobbeleersten met *c* O *d* daerom oock ist van C tot I een groot halftoon ende van I tot D een cleen

halftoon. Voort soo is M een vyfde op I duer de stelling, daerom oock ist van G tot M een groot halftoon want I D is een cleen halftoon ende D E een toon, E F een cleen halftoon, F G een toon maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen indervoughen dat G M tot voldoening der vyfde M I een groot halftoon maken ende vervolghens soo is M *a* een cleen halftoon. Maer *g* R sijn dobbeleersten met G M, daerom oock is *g* R een groot halftoon.

Wyder soo is P een vyfde op M duer de stelling daerom oock ist van *d* tot P een groot halftoon want van M tot *a* is een cleen halftoon van *a* tot *b* een toon, van *b* tot *c* een cleen halftoon van *c* tot *d* een toon, maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen waer duer *d* P tot voldoening der vyfde P L nootsaeckelick een groot halftoon is, ende vervolghens soo moet P *e* een cleen halftoon sijn.

Maer D K E sijn dobbeleersten met *d* P *e* daerom oock is D K een groote halftoon ende K E een cleen halftoon. Voort soo is N den vijfde op K duer de stelling daerom ist oock van *a* tot N een groot halftoon. Want van K tot E is een cleen halftoon ende van E tot F oock een cleen halftoon ende van F tot A twee toonen, maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen waer duer *a* N tot voldoening der vyfde N K een groot halftoon maeckt, ende vervolghens N *b* een cleen halftoon, maer A H B sijn dobbeleersten inde *a* N *b*, daerom oock is A H een groote halftoon ende H B een cleen halftoon. Dit dus wesende H F bestaet uyt twee toonen ende drie cleyn halftoonen. Want H B is een cleen halftoon, alsoo oock is B C, ende C E sijn twee toonen ende E F een cleen halftoon maken tsamen als vooren gheseijt is, twee toonen ende drie cleene halftoonen. H F dan en is gheen vyfde

twelck teghen dervaring teghen loofweerdicheyt teghen tghemeen ghevoelen ende ontkenning der beginselen soude sijn; merckt wijder dat soo veel BC cleender waer dan een recht halftoon soo veel soude AH nootsaeckelick grooter moeten wesen ende vervolghens haer verschil tot malcander tweemael soo veel twelck teghen tghemeen ghevoelen is. Want ghelyck int ghesanck de climming van *mi* tot *fa* evensoo hooch is als van *la* tot *sa*, alsoo istter van B tot C evensoo veel rysing als van A tot H. BC dan en is niet minder dan den rechten helft eens toons; sghelycx salmense oock bewysen niet meerder te wesen, sij is dan nootsakelick den rechten helft, alsoo oock sijn al dander ghelyck van A tot H, van H tot B, enz. Dit soo wesende de dobbeleerste bestaet nootsaecklick in ses toonen al even groot ofte in twelf evegroote halftoonen daerom heeftmen tbegheerde alsder tusschen de palen der dobbeleersten 1 ende $\frac{1}{2}$ gheteyckent hier onder met A B ghevonden sijn. elf middeleverednighe ghetalen C,D,E,F,G,H,J,K,L,M,N, aldus

A. 1 . . . . . Selftoon . . . . Eerste
C. $\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{2}$. . Halftoon . . . . Cleen tweede
D. $\sqrt{}$ (6) $\frac{1}{2}$ . . Toon . . . . . Groote tweede
E. $\sqrt{}$ (4) $\frac{1}{2}$ . . Onderhalftoon . Cleen derde
F. $\sqrt{}$ (3) $\frac{1}{2}$ . . Tweetoon . . . Groote derde
G. $\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{32}$. Tweeenhalftoon. Vierde
H. $\sqrt{}$ $\frac{1}{2}$ . . . Drietoon . . Qua groote vierde of qua cleene vijfde
J. $\sqrt{}$(12) $\frac{1}{128}$. Drieenhalftoon . Vijfde
K. $\sqrt{}$ (3) $\frac{1}{4}$ . . Viertoon . . . . Cleen seste
L. $\sqrt{}$ (4) $\frac{1}{8}$. . Vierenhalftoon . Groote seste
M. $\sqrt{}$ (6) $\frac{1}{32}$. Vijftoon . . . . Cleen sevende
N. $\sqrt{}$(12) $\frac{1}{256}$ Vijfenhalftoon . Groote sevende
B. $\frac{1}{8}$ . . . . . Sestoon. . . . . Dobbeleerste, achtste.

Inder voughen dat A 1 tot A 1 de reden des selftoons ofte der eerste is, maer A 1 tot C $\sqrt{}$ (12) $\frac{1}{2}$ de reden des halftoons ofte

der cleen tweede ende A1 tot D $\sqrt{(6)}\frac{1}{2}$ de reden des toon ofte der groote tweede ende soo voort met de rest, waer uijt blyckt dat de vyfde en dander in sulcke redens zijn als wij voorghenomen hadden te bewysen.

Ymant mocht nu achten na doude meyning hoe dattet soet gheluydt der vyfde in soo *) onuijtsprekelick, onredelick, ongeschickt ghetal bestonde, daer op wij int breede souden connen antwoorden maer want ons voornemen niet en is an donuytsprekelicke onredelicheyt ende ongeschicktheyt van sulcken misverstant hier te leeren duytsprekelicheyt redelicheyt geschicktheijt ende natuerlicke constighe volmaecktheyt deser ghetalen, sullent, als elders bewesen hebbende, daer bij laten.

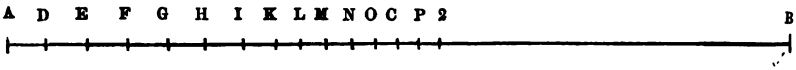
Maer soomen de boveschreven redens al wilde beteeckenen met syden en twelfde grootheden inde selve weerde men soude den voortganck des noemers vande ghebroken in oirdentlicke voortganck vinden waer uyt, duer lichticheyt bekent worden al de redens boven den sestoon ofte dobbeleerste ghelyck dit voorbeelt opentlick ghenouch aenwyst.

AtotA	A$\sqrt{(12)}$1 . . .	Selftoon.	Eerste
A » H	C$\sqrt{(12)}\frac{1}{2}$ . . .	Halftoon	Cleen tweede
A » B	D$\sqrt{(12)}\frac{1}{4}$ . . .	Toon	Groote tweede
A » C	E$\sqrt{(12)}\frac{1}{8}$ . . .	Onderhalftoon .	Cleen derde
A » I	F$\sqrt{(12)}\frac{1}{16}$ . .	Tweetoon	Groote derde
A » D	G$\sqrt{(12)}\frac{1}{32}$. . .	Tweeenhalftoon.	Vierde
A » K	H$\sqrt{(12)}\frac{1}{64}$	Drietoon. qua groote	vierde of qua cleen vyfde
A » E	I$\sqrt{(12)}\frac{1}{128}$. .	Drieenhalftoon .	Vyfde
A » F	K$\sqrt{(12)}\frac{1}{256}$. .	Viertoon	Cleen seste
A » L	L$\sqrt{(12)}\frac{1}{512}$. .	Vierenhalftoon .	Groote seste
A » G	M$\sqrt{(12)}\frac{1}{1024}$.	Vijftoon.	Cleen sevende
A » M	N$\sqrt{(12)}\frac{1}{2048}$.	Vijvenhalftoon .	Groote sevende
A » *a*	B$\sqrt{(12)}\frac{1}{4096}$.	Sestoon	Dobbeleerste, achste
	$\sqrt{(12)}\frac{1}{8192}$.	Sessenhalftoon .	Dobbel cleen tweede
	$\sqrt{(12)}\frac{1}{16384}$.	Sevetoon	Dobbel groote tweede
	$\sqrt{(12)}\frac{1}{32768}$.	Sevenenhalftoon.	Dobbel cleen derde.

*) *Inexplicabili irrationali absurdo numero.*

*Meetconstighe deeling der *) sanglini.*

Om nu de sanglijn meetconstlick te deelen alsoo datmen daer in hebbe de ware volcommen gheluyden des natuerlicken ghesancks dat is inde boveschreven redens so laet AB de sanglijn beteeckenen wiens middelpunt C is, de selve salmen



deelen in D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, alsoo dat GB ende LB. twee middeleverednighe lynen sijn tusschen AB ende CB die op verscheyden wyse, werckelick (want de wisconstighe is alsnoch onbekent) ghevonden wort doch bequamelicst mijns bedunckens na de manier van . . . . [sic] . . . . Voort alsoo dat IB middeleveredniche sij tusschen AB ende CB, diemen vindt duer het.[sic] Voorsteldes.[sic] boucs van Euclides. Sghelycx EB tusschen AB en GB. Wederom DB tusschen AB en EB. Voort FB tusschen AB en IB. Sghelycx HB tusschen GB en IB; Ende KB tusschen EB en CB. Wederom MB tusschen IB en CB ende NB tusschen LB en CB. Ten laetsten OB tusschen NB en CB.

Maer soomen dese deelinghen van C naer B noch voorder begheerde dat can met lichticheyt geschien in deser voughen: Men sal teeckenen P int middel van DB ende Q int middel van EB ende soo voort want PB sal teghen AB den sesenhalftoon ofte dobbel cleentweede maken ende QB teghen AB den sevetoon ofte dobbelgroote tweede.

Telconstighe deeling der sanglijn.

Tot hier toe is vande Meetconstighe deeling gheseyt int volghende sullen wij de telconstighe verclaren dat is duer slechte ghetalen inde daet ghenouch doende, aldus: Ic deel de

*) *Regula harmonices seu monocordus.*

lijn AB in 10000 even deelen nu om te weten hoe veel der selver tot yder toon behooren ist beghin anden drieenhalftoon segghende 1 gheeft $\sqrt{(12)}_{\frac{1}{12}}$ wat 10000? comt $\sqrt{(12)}$781250000000000000000000000000000000000000000 die doet zeer bij ende in heel ghetal ten naesten 6674. Want 6675 te veel is soo duer de twelfde grootheyt van deen en dander blijcken can. Maer om eyghentlicke bewys te doen in yder deel der wercking vande vinding deser syden soo is te weten dat de syde der tweede grootheyt ofte viercants syde des boveschreven vierde paels is bina $\sqrt{(6)}$883883476483184405501 05 (die de gront hier af begheert mach dit ghetal in sich self menichvuldighen daer bij doende 96389809968824984488975 dieder overschoten; tblyckt oock duer tvoornomde overschot datde ware syde van gheen eenheyt meerder en is maer alleenlick van ontrent $\frac{96389809968824984488975}{1767766952966368811002 11}$). Vande voornomde $\sqrt{(6)}$883883476483184405501 05 wederom ghetrocken viercants syde die doet $\sqrt{(3)}$297301778750 (de prouf is openbaer duer menichvuldighing deses ghetals in sich daer toe doende doverschietende 404488987605, tblyckt oock duer tvoornomde overschot dat de ware syde van gheen eenheyt meerder en is maer alleenlick van ontrent $\frac{404488987605\ ^{*)}}{594603557501}$). Hier uyt ten laetsten ghetrocken syde der derde grootheyt ofte teerlinxsyde comt 6674, de prouf van desen is dat 6674 teerlincwijs ghemenichvuldicht ende daer toe ghedaen doverschietende 26628726 maken haer eerste teerlincstal, tblyckt oock duer tvoornomde overschot datde ware teerlincxsyde van gheen eenheyt meerder en is maer alleenlick van ontrent $\frac{26628726}{133646851}$ Inder voughen dat 6674 de voornomde syde in heeltal ten naesten is. De Reden die des drieenhalftoons is in slechttal te nemen als van 10000 tot 6674, daervan ghetrocken Reden $\frac{10000}{6674}$ des drieenhalftoons van Reden $\frac{2}{1}$ des sestoons blyft

*) Dese ghetalen moeten noch eens overzien wesen teghen den oirspronck.

Reden $\frac{13348}{10000}$ des tweeenhalftoons. Maer de telder en is gheen 10000, om die dan daer toe te brenghen ick seg 13348 gheeft 10000 wat 10000? comt 7491. Inder voughen dat de tweeenhalftoon is van Reden $\frac{10000}{7491}$, de selve ghetrocken van Reden $\frac{10000}{6674}$ des drieenhalftoons blyft (na verandering in ghemeen telder 10000) Reden $\frac{10000}{8909}$ des toons tot de selve ghedaen noch alsulck Reden comt Reden $\frac{10000}{7937}$ des tweetoons, de selve van Reden $\frac{10000}{7491}$ des tweeenhalftoons blyft Reden $\frac{10000}{9438}$ des halftoons. Dese toonen bekent wesende, al dander worden openbaer duer verscheyden manieren van wercking want om te hebben de Reden des onderhalftoons men mach trecken den toon vanden tweeenhalftoon ofte den tweetoon vanden 3½toon ofte vergaren den toon totden halftoon, ende alsoo met al d'ander.

A	10000.	Selftoon	Eerste
	9438.	Halftoon. . . .	Cleen tweede
	8908.	Toon.	Groote tweede
	8404.	Onderhalftoon .	Cleen derde
	7936.	Tweetoon . . .	Groote derde
	7491.	Tweeenhalftoon	Goe vierde
	7071.	Drietoon	Qua vierde
	6674.	Drieenhalftoon	Vyfde
	6298.	Viertoon. . . .	Cleen seste
	5944.	Vierenhalftoon.	Groote seste
	5611.	Vyftoon	Cleen sevende
	5296.	Vyfenhalftoon .	Groote sevende
	5000.	Sestoon	Dobbeleerste
	4719.	Sessenhalftoon.	Dobbelcleen tweede
	4454.	Sevetoon. . . .	Dobbelgroot tweede

Men soude de voornoem deeling oock mueggh aldus doen: Ghevond hebbende de Reden d drieenhalftoons als boven i krijgh die des drietoo segghende 1 gheeft √ wat 10000? comt 70 inder voughen dat Reden 100 70 die des drietoons is, de sel ghetrocken van Reden 100 66 des drieenhalftoons blyft (verandering in ghemeen teld 10000) Reden $\frac{10000}{9438}$ voor d halftoon, daertoe vergaert no

alsulcken reden comt voor den toon Reden $\frac{10000}{8908}$ daer wij i deerste manier creghen Reden $\frac{10000}{8909}$ doirsaeck van welck verschilk openbaer is. Wij sullen ons inde onderschreven tafel om oirdentlick vervolghs wil an 8909 houden ende om der ghelycke oirsake ind tweetoon an 7936. De ghetalen boven den sestoon word lichtelick ghevonden duer halving der voorgaende, als o

B

te hebben tghetal des sessenhalftoons, ick neem den helft van 9438 die doet 4719 ende voor den sevetoon den helft van 8908 enz. Een sanglijn dan aldus ghedeelt synde, in 10000 even deelen voor yder toon sullen soo veel deelen commen rekenende van B naer A als de volghende beschryving van dies uytwyst.

Nota. Hier moet de voorgaende tafel ende lijn A B commen.

Soomen nu wilde sien hoe verre de ghedwaelde deelinghen van Pitagoras, Ptolemeus, Bootus ende Zarlinus buyten den wegh waren, men can daer lichtelick toe commen ende haer redens grootste ghetal oock op 10000 te stellen. Ic neem de Pitagorische diens tafel tot den drieenhalftoon wert beschreven, soodanich is

10000	Eerste
9364	minste tweede
9492	meeste tweede
8888	Groote tweede
8437	Cleen derde
7901	Groote derde
7500	Goe vierde
7023	Qua vierde
6666	Vyfde

Alwaer blyckt dat de cleynste pael des drieenhalftoons van 8 deelen te cort is. Want ghetrocken 6666 van 6674 blyft 8 maer den halftoon van 54 deelen te lanck. Ymandt mocht nu dencken waerom dit verschil inden halftoon soo veel grooter is dan inden drieenhalftoon? Daer af seg ick doirsaeck openbaer te wesen int voorbeelt hier boven ghegheven met slechter talen daer wij 110 inde plaets des sestoons stelden ende vyf persoonen A,...E oirdentlick beteeckenende den drieenhalftoon tweeenhalftoon, toon, tweetoon, ende halftoon, alwaer A inde quad wercking maer een te veel en creegh ende B een te weijnich, C

twee te veel D vier te veel maer E vyf te weynich Inder voughen dat E vyfmael meer te weynich had dan A te veel; Ende even eens uyt de ghelycke oirsaecke cryght hier den halftoon vyfmael meer te weynich (int ansien der Redens vande grofheyt) dan den drieenhalftoon te veel heeft. Uyt desen is oock openbaer dattet verschil des cleen halftoons ende groothalftoons thienmael meerder is dan de Reden des drieenhalftoons te groot ghestelt was, twelck doirsaeck is dat dese dwaling inden halftoon soo veel merckelicker blyckt als in dander toonen.

MERKT.

Tis teghedencken dat de namen vande dobbelheyt drievoudicheyt viervoudicheyt der eersten tweeden derden enz. niet en sijn int ansien vande grofheyt der gheluyden maer vande omganghen (nemende acht vervolghende trappen voor een omganck) want ghelyckmen twee drie of vier keeren der slanghens dobbel, drievoudich oft viervoudich mach segghen an een omtrec niet int ansien vande oneven lengden der lynen waer in sulcke Reden niet en bestaet maer opsicht hebbende tot de menichte der keeren: Alsoo heetmen dese eersten tweeden enz. dobbel drievoudich viervoudich int ansien der omganghen sonder te letten opde grofheyt der gheluyden na welck de palen der drievoudicheerste in viervoudighe Reden sijn ende die der viervoudighe eerste in achtvoudighe reden. Inde dobbel eersten overcommet bij ghevalle om wat anders. Want een eersten ofte selftoon te weten Reden $\frac{1}{1}$ ghedobbelt dat is daer toe vergaert noch een Reden $\frac{1}{1}$ en maeckt al maer Reden $\frac{1}{1}$ men heeftse dan alleenlick opsicht tot de omganghen des gheluydts.

ANHANG.

Voorreden / Vande Vierde / Van *la si ut*, Vande twelf toonen / De natuer en wort inde compositie niet ghevolcht als in Rhetorica / Der sesten en derden ghelycke daling en climming is wettelick als sij overhandt nu een cleen dan een groote comt. Waerom niet cijferletters inde langhe noten / Bemollaris cantus is onnut onderscheijt. Tis een ghemeen woordt dat die wel onderscheyt die leert vaec. maer daerbenevens is te weten dat die qualick onderscheyt leert qualick Species perfecta ende imperfecta sijn al quaet onderscheyt.

Hier vooren beschreven hebbende de spiegeling der Singconst soo heeft mij ghoedt ghedocht daer bij te voughen met corte woorden de verclaring van sommighe duysterheden ende valscheden inde Singdaet deses tydts inghewortelt.

Hooftstick vande vierde.

De *) vierde wort vande ghesanckmakers deses tijts voor quaetluydich ghehouden, alsoo datse in ghesanck met drie of meer stemmen teghen de leeghste niet ghehoort en mach worden ja onder twee stemmen en wilmense gantschelick niet lyden. Maer soomen vraeght waerom? sij antwoorden overmidts datse in ons ghehoir mishaeghlick is: Twelck ick ontken: sal oock de contrari bewijsen eerst met reden daer na, dat meer is, mitterdaet. De reden is dusdanich: Twee

*) *De Diatessaron.*

gheluyden der dobbeleerste hebben soo grooten ghelijcheyt dat singhende twee persoonen, eenen liedt, ick neem een oudt mensch met een kindt, dese een dobbeleerste hoogher als die doch sonder kennis der dobbeleersten sij en weten ghemeenlick anders niet dan datse beyde in een selfde toon synghen. Ja wij sullen hier oock bewysen dat sulcx dalder ervarendste somtyts ghebeurt. Soo groot dan is dese ghelyckheyt dattet in hen een ghelaet der selfheyt heeft, daerom bij de twee boveschreven stemmen der dobbeleersten ghestelt eenighe derde stem alsulcken aert van soetluidichheyt ofte quaetluijdichheyt als die derde met deene maeckt soodanighe maektse oock met dander. Als neem ick die derde stem een toon boven de leegste wesende, sij maekt daer mee de qualuydighe tweede ende teghen de bovenste de qualuydighe sevende van ghelycke ghedaente: Maer soo de derde stem twee toonen boven de leechste waer, maken de soetluydighe derde ende met de bovenste gheen qualuydighe toon maer de soetluydighe sesten van ghelycke gedaente: Ende vervolghens de derde stem met de bovenste een behaeglick vyfde makende, sij en can met donderste stem niet mishaeghlick wesen, maer maeckt daer teghen een behaeghlicke soetluydighe vierde. Want dit is een ghemeen reghel dat een selfde tot eveneen selfde reden 1 heeft. Hier toe mochtmen noch brenghen de loofweerdiche der Grieken met hun navolghers diet soo mede verstaen hebben, maer die verlatende sullen ant daetlich bewijs commen. Ymandt de vierde

quaetluydich achtende segghende die in sijn ghehoir mishaeghlick te wesen, de contrari ende sijn onghelyck wort hun aldus bethoont, men sal nemen eenighe twee verscheyden gheluijden als van een snaer met een menschestem ofte een fluyte met een snaer oft een stem met een fluyte daer mede makende alsnu een vierde alsdan een vyfde ende dat tot verscheydemael ende oock verscheyden vierden en vyfden hoogher en leegher, vraghende telck an sijn partie wat het is dat hij sinct ende sullen daetlick bevinden dat hij sonder sekerheyt daer af oirdeelende sijn selven dickwils teghen sal spreken dicmael een vyfde achtende tgene hij te vooren een vierde seyde te wesen ende weder ter contrarie een vierde oirdeelende tgene hij te vooren een vyfde gheseyt had: Twelck soo daetlick blyckende wat behouven wij meer woorden? Wie isser soo onredelick die hem met sijn selfs woorden beschamen sal? segghende de vierde mishaeght mij ende de vyfde bevalt mij seer wel. Maer om deser dynghen oirsake wat breeder te verclaren soo is te weten dat als sulcke twee gheluyden tsamen een eerste ofte dobbel eerste maken dalderscherpste ghehoiren en connen niet sekerlick oirdeelen welck van tween het is. Om hier af by voorbeelt noch opentlicker te spreken ick neem datter twee sijn deen op de fluyte spelende dander synghende, elck sijn partie van eenich liedt ghesonghen ghelyckmen achten soude dattet behoort te wesen

Dit liedt daer naer noch eens overgaen maer alsoo dat den sangher een dobbeleerste hoogher ga dan te vooren, yder (om de reden als vooren te weten datter op een dobbeleerste na gheen sekerheyt en is) hooret voor goedt an, nochtans die toon daer den singher eerst een vyfde onder den fluter was daer sal hij nu nootsaecklick een vierde boven wesen. Inder voughen dat ghenomen het deerste mael een vyfde was soo salmen hier de vierde voor vyfde anhooren. Daerom de ghene die noch segghen dat de vierde in hun ooren mishaeghelick luyt, maer de vyfde seer bevallick, ick en siender niet beter af te besluyten dan dat de ghewoonte uyt de leest [?] eeu ghesproten een weeckheyt in hemlien ghewortelt heeft.

Doirsaeck waerom Zarlin syn eerste toon niet en stelde als dander heeft goede reden overmidts daer duer verdorven soude sijn doirdentlicke voorganck der climming van deen toon tot dander dats van trap tot trap.

Want had hij deerste toon der ouden voor sijn eerste ghenomen soo en soude sijn elfde toon gheen trap hoogher gaen dan sijn voorgaende neghende maer vyf trappen leegher. Ende om de selve reden moet sijn tweede toon oock tot die selve plaets wesen.

Merckt dat ons 1e toon overcomt met haer 10e want sij beyden in *fa* sijn. alleenlick verschillense daer in dat dese hun middelste tsaemval een trap hoogher maeckt dan die. Sgelycx overcomt de 2e met de 11e, de 3e mette 12e, de 5e mette 7e, de 6e mette 8e. Wat de vierde en de 9e belanghen, sij en overcommen noch met malcander noch met eeniche van al dander.

Tgheheele onderscheyt datmen maeckt tusschen de ghesanck diemen noemt *Bemollaris* ende *Beduralis* sij is geheel onnut ende eyghentlick gheen onderscheijt, maer al een selve. Want geeft de C solfaut sluetel in bemol den naem van Gsolreut, bedur daerop singhende ghij hebt al de selve ghesanck die in bemol was Tselfde heeft hem alsoo ghevonden de sluetel van Afaut bemol den naem van Csolfaut bedur. Sgelijcx de sluetel Gsolreut bemol den naem van Dlasolut bedur. Ofte gheeft per contrarie alle dese den naem van die ende hebt al tselfde: Ten is dan gheen ander aert van ghesanck als dander ende vervolghens soo ist een onnutte onderscheijt.

Om dit te bewysen, soo merckt dat alsmen singt (op dat wyt noemen na der orghelisten wyse) *gis*, teghen *dis*, opwaert als in . . . . . [sic] . . . . . Ende meer anderen, de twee stemmen der selver *gis* en *dis* maken met malcander, soot openbaer kennelick is, een volmaeckte goede vyfde. Waer uyt de voorgaende redens der gheluyden alsoo nootsaecklick te moeten wesen aldus bethoont wort.

Laet ABCDE etc. beteeckenen de clawieren van een orghel clavisimbel ofte clavicorde (want soodanich reetschap tottet voornemen bequaemer is dan de sanghlijn) alsulck reetschap sij ghestelt na eenighe ghemeene manier van stelling, ick neem (op dat wij een seker voet hebben) aldus

. . . . . .

Nu de vyfde MP dat *gis* ende *dis* sij (ghelyck inde voornomde ghesanck gheseyt is) goet ende volmaeckt. Dit soo wesende laet den halftoon MP meerder of minder sijn, waert mueghelick, dan etc.

Hoofstick waer in doirsaeck verclaert wort vande onvolmaecktheyt dieder int stellen der orghels ende clavesimbels ghebuert.

Tgheen wij int voorgaende hooftstick vande vyfde MP gheseyt ende besloten hebben is ghenomen de selfde vyfde MP goet te wesen maer tghebuert in verscheyden reetschappen soo dervaringh betuycht datse deenmael een weynich te groot valt dandermael een weynich te cleen, somtijts oock goet, maer wantse int

spelen niet, oft maer seer weynich ghebruyckt wort, soo latent veel meesters diese stellen, blyven by tgheen tgheval uytbrenght overmidts al de rest diemen besicht sooveel tghehoir belanght, goet ghenouch is. Maer om te verclaren donverclaerden gesanck waerom dese vijfde... inde voorsz. reetschappen niet soo recht te treffen en is als de natuerlicke ghesanck der menschelicke stemmen die betuijcht te moeten wesen, soo dient verstaen te worden de ghemeene onvolmaecktheijt des werckelicken handels in alle stoffen, welcke niet soo volcommentlick ghelyck de wisconstighe te treffen en is. Als by voorbeelt een stuck lywaet van 50 ellen duer verscheyden persoonen voorsichtelick ghemeten d'een sal een stroobreet ofte duijm meer vinden als dander, Doch soose teenemael ende gants effen uyt commen sonder een haer te verschillen, sulcx ghebuert selden ende by ghevalle, sgelycx heeft hem alsoo int meten der vlacken, lichaemen ende ander stoffen als tijt, roersel, swaerheijten; Oock mede inde stof des gheluyts daer ons verschil af is. Want men can gheen twee gheluyden als der vierde, vyfde of seste etc. alsoo passen dat sijt in duyterste volcommenheyt sijn, ten waer bij ghevalle; daer af oock gheen bewys en can ghedaen worden. Maer om dese werckelicke onvolmaecktheyt duetlick te bethoonen, soo leght den bandt van een luyt ter plaets daer u dunckt haer snaer teghen een ander snaer de volmaeckte vyfde te maken, verschuyf daer naer dien bandt alleenlick soo veel als de dickte van een haer opwaert of neerwaert ende sult bevinden datter gheen merckelicke verandering duer en ghebuert niet teghenstaende datter voor seker eenighe verandering gheschiet. Doch soo

ghij vermoedet ende u selven toegaeft die valsheijt der vyfde te bemercken soo laet die verschuijving des bandts duer een ander persoon ghedaen worden, alsoo dat ghij niet en weet of hyse de breede van een haerken opwaert of neerwaer schuyft, ofte op de selve plaets laet; hij u alsoo tot verscheydenmael vraghende na de goetheyt der vyfde sult daetlick u oirdeel onseker bevinden, dicwils de goede quaet segghende ende de quade goet. Tis dan openbaer dattet gheen menschelick ghehoor mueghelick en is hoe scherp het sij twee toonen in haer uyterste volcommenheyt heel seker te passen. Waer uyt volght dat veel sulcke feylen die elck int besonder onbemerckelick sijn, nochtans tsamen een merckelicke dwaling maken; Want ghelyck in tvoorseyde stuck lywaet duer verschyeden persoonen ghemeten veel cleyne verschillekens op yder elle tsamen opt cinde eenich merckelick verschil maken, alsoo hier oock inde gheluyden. Want overmidts dese vijfde . . . seer selden ghebruyckt wort soo laetmen die clyene onbemercklicke feylkens daer op al ancommen welcke ten einde altsamen bemercklick connen sijn, somtijts oock onbemerckelick na tgheval. Daerom en ist gheen wonder dat de bovenste meesters sulcke reetschappen voorsichtelick stellende int laetste nochtans quade toonen ontmoeten die goet behooren te wesen, maer tis natuerlick. Ende diet niet en verstaet hem ghebreeckt de kennis des onderscheyts tusschen werckelicke ende wisconstighen handel, twelck wij bewysen moesten.

BIJLAGEN A—E.

BIJLAGEN A—E.

U. E. t'selue claerlick te bethoonen, ick hebbe de clauieren met letters geteeckent nae onse gewoonte, ende de nooten des natuerlicken sancx daer onder, dit gedaen synde, ick stelle eerst de achste van F tot *f*, soo volcommen als mogelick is, daer nae de groote derde van F tot A, twelcke men alsoo volcomen door natuyrlick gehoor kan stellen als de achste, ten laetsten stelle ick oock soo volcomen als mogelick is de groote derde van A tot *Ce*, welcke de spleeten tusschen C ende D, dit aldus gedaen synde, by soverre de achste bestonde uyt drie volcomen groote derden, soo moste van *Ce* tot *f* oock een volcomen derde synde, maer de eruaring betuycht ons sekerlick t'selue meer als een groote derde te syn, de selue reden geuet oock met de nooten des natuirlicken gesanckx. Want alle eruaren gesangmakers sullen seggen vande 1 noot tot de 5 een volcomen groote derde te syn, van gelycken vande 5 tot de 9 noot is een volcomen groote derde maer vande 9 noot tot de 13 noot (dewelck oock een volcomen groote derde moste syn indien de achste bestonde uyt drie groote derden) sal nietmant int singen eruaren synde, toelaeten een groote derde te syn. maer sullen alle seggen, gelyckt oock is, dat het een onvolcomen *) vierde is, soo dat hier uyt openbaer is dat ses euen heele thoonen minder syn als de achste, ende volgens de twee halffthoonen der natuerlicke achste elck meerder als de helft des heelen thoons. Van gelycken proeue doende met de cleene vierden, daer zal beuonden werden (van de bouenste *f* beginnende) vier cleene vierden meerder te syn als een volcomen achste, tselue is mede openbaer, door de nooten des natuerlycken sancx want de 1 noote tegen de derde sy is maer een

*) Ofte vercleende.

vergroote thoon, dewelck een volcomen cleene derde moste syn, indien twaelff ende halffthoonen de volcomen achste souden maecken; soo dat uyt dese twee proeuen seker beuonden wert, drie groote derden minder ende vier cleene derden *) meerder als een volcomen achste te syn, waer uyt onder scheyt der halfthoonen nootsaeckelick moet volghen, oock soo is het by alle indese const eruaeren soo ghemeen, dat niemant en twyfelt ons inde natuyrlycke sanck soo wel cleene als groote halffthoonen t'ontmoeten, want men kan vande cleene derde tot de groote derde, noch vande cleene seste tot de groote seste niet comen sonder den cleenen halffthoon, ten overvloet hebbe ick een cort voorbeelt gemaeckt met twee stemmen waer in men bequamelick mach sien ende hooren t'onderscheyt des grooten ende cleenen halffthoons, soo dat men vrij euen als voor begin (dwelck geen bewys en behouft) stellen mach ons inde natuyrlicke sanck cleene ende groote halffthoonen t'ontmoeten: dit selue heb ick wel geweeten, als ick oyt aen U. E. screeff, maer meende offmen door sulc redelycke deeling der sanglyn de halfthoonen hadde konnen euen maecken, dwelck my de proeue geleert heeft niet te konnen geschien, want de sanglyn eueredelick verdeelt synde ende de clauesingel daer nae gestelt (gelyck ick versocht hebbe) alle groote derden syn te groot ende alle cleene te cleen. Nu t'ondersoucken van desen heeft my doen vinden de waere natuyrlycke redens der thoonen waer van naest Gode (sonder flatteringe gesproocken) de eer U. E. alleen toecomt om twee bysondere redenen, d'eerste is datse sonder kennis der worteltalen niet geuonden connen werden, welcke ick geerne beken (soo veel ick daer van weet) uyt niemants andders dan uyt

*) [lees: vierden].

U. E. fransche telconst geleert te hebben; dander reden is dese dat, sonder de vermaninghe vande Reden der vyfde van 3 tot 2 in de bepalinghe des Wysentyts [?] van uwe E. wistconstighe gedachtenissen gedaen, ick noyt de saeck soo verre naegedacht en soude hebben. Om dan het vinden der waere Redens te thoonen, soo is U. E. kennelick uyt stellinghe der vyffde van 3 tot 2 te volgen twee oneuen heele thoonen, d'eene van 9 tot 8, d'ander van 10 tot 9, welcke onevenheyt van heele thoonen ons inde natuyrlycke sanck niet en ontmoet, daeromme dese twee Redens vergaert, comt reden van 5 tot 4 voor de waere Reden des tweetoons, dese Reden gehalft comt Reden van $\sqrt{5}$ tot 2 voor de waere Reden des thoons, der gelycke vyff Redens te weten $\sqrt{3125}$ tot 32 getrocken vande waere Reden der achste van 2 tot 1 blyft voor de twee groote halffthoonen der achste Reden van 64 tot $\sqrt{3125}$, dese wederomme gehalft, comt voor de Reden des grooten halffthoons Reden van 8 tot $\sqrt{3125}$ dese Reden wederomme getrocken vande Reden des heelen thoons $\sqrt{5}$ tot 2 blyft Reden van $\sqrt{78125}$ tot 16 voor de cleene halffthoon, nu wetende t'verschil der vyffde ende vierde een heelen thoon te syn, ende tverschil der vierde ende groote derde een grooten halffthoon te syn, ende tverschil der groote ende cleene derde een cleenen halffthoon te syn, d'ander Redens der thoonen syn door vergaring en afftrecking licht om vinden. U. E. sullen int ondersoucken andder getalen als de myne beiegenen maer sy sullen inde selue Reden staen want ick hebbe de minste paelen gesocht die ick vinden coste, om de prouff daer van des te lichter te doen. Nae dese Redens de sanglyn verdeelt (gelyck ick gedaen hebbe) ende de clauesingel daer na gestelt, sy is soo wel gestelt als mogelick is te geschieden, hier hebben U. E.

de Rechte waere Redens der thoonen, ende moghen daer met handelen nae welgevallen, soo U. E. eenighe swaricheyt ontmoet ick ben bereyt U. E. altyts te voldoen, want ick teghenwoordich (sonder roem spreckende) dese stoff grondelick verstae, by aldien U. E. oock begeert een wel verdeelde sanglyn eueredelick, ende oock nae dese nieu waere gevonden Redens verdeelt synde (dwelck bequamelick op eene sanglyn can geschieden) om het onderscheyt der selue niet alleen te sien maer oock te hooren salse U. E. geerne met deelen, ende met yemant van onse boden ouerseynden; de reden waeromme ick de verdeelinghe der sanglyn begin van F van G ofte van C dunct my betamelick te syn; om dat *ut* de eerste noot des natuyrlycken sanx is, en datmen maer op dese drie letters *ut* en singt, hoe wel het inde daet euenveel is van wat letter men de deeling begint, alsmen maer gaeslaet wat afcompsten der thoonen de volgende geluyden maecken tegen d'eerstgestelde. Hier mede eyndigende wil ick U. E. den alderhoochsten beuelen die U. E. in landuerighe gesontheyt gelieue te spaeren.

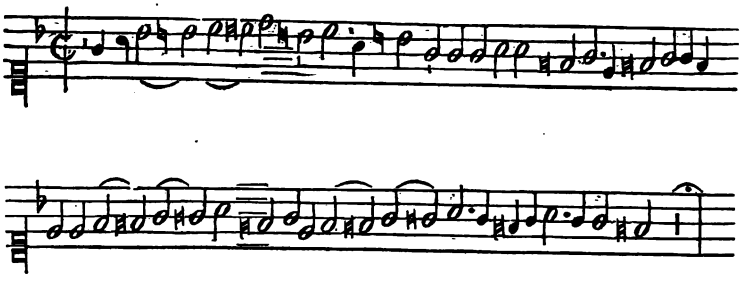
U. E. altyt dienstwillighe vrient
ende dienaer Abraham Verheyen organist
tot Nijmeghen.

U. E. sal gelieuen mij eens met een woort ofte twee t'ontbieden, waer ick een welgemaeckte drieroe (in U. E. Meetdaet beschreuen) soude moghen becomen, ende wat de selue ontrent soude moeten costen, dit doende my sal grooter vrientschap geschieden.

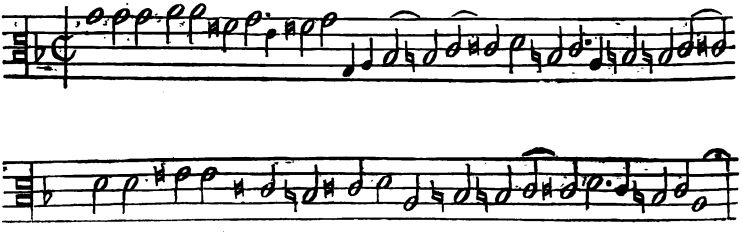
BIJLAGE B.

(Behoort bij Bijlage A.)

Cort voorbeelt met 2 stemmen, waer in claerlyck gesien ende gehoort wordt het onderscheyt des grooten ende cleenen halffthoons.



de nooten met dese ⌒ ⌣ gebonden beteyckenen de cleene halffthoon, dander syn alle groote halffthoonen.



BIJLAGE C.

(Behoort bij Bijlage A.)

De Redens der Thoonen, eueredenich met Thoonen des Natuerlicx Ghesancx.

Selffthoon is van	1 tot 1.
Cleene halffthoon is van.	W78125 tot 16.
Groote halffthoon is van.	8 tot W3125.
Thoon is van.	√5 tot 2.
Vercleende cleene derde ofte twee groote halffthoon is van	64 tot W3125.
Vergrootte thoon is van.	W1953125 tot 32.
Cleene derde is van	4 tot W125.
Tweethoon ofte groote derde is van .	5 tot 4.
Vercleende vierde is van.	32 tot 25.
Vergrootte groote derde is van . . .	W48828125 tot 64.
Vierde is van.	2 tot W5.
Driethoon ofte vergroote vierde is vā. .	√125 tot 8.
Vercleende vyffde is van.	16 tot √125.
Vyffde is van	W5 tot 1.
Vercleende cleene seste is van. . . .	128 tot W48828125.
Vierthoon ofte vergrootte vyffde is vā. .	25 tot 16.
Cleene seste is van.	8 tot 5.
Groote seste is van.	W125 tot 2.
Vercleende cleene seuende is van . .	64 tot W1953125.
Vyffthoon ofte vergroote groote seste is van	√3125 tot 32.
Cleene seuende is van	4 tot √5.
Groote seuende is van	W3125 tot 4.
Vercleende achste is van	32 tot W78125.
Achste is van	2 tot 1.

Alle dese thoonen ontmoeten ons inde natuerlicke sanck maer de vercleende ende vergrootte thoonen werden niet ofte seer weynich gebruyckt om datse qualick met goet oirdeel gesonghen connen werden; sy konnen alle lichtelick gesocht ende gesien werden uyt de geteeckende clauieren ende oock eueneens uyt de nooten des natuerlicken sancx daer onder staende, als by voorbeelt vande 1 tot de 2 noot is de cleene halffthoon vande 2 tot de 3 noot is de groote halffthoon, vande 1 tot de 3 noot is een thoon, vande 1 tot de 4 noot is een vergrootte thoon, etc. Hier uyt volcht dat de banden aende halsen der speeltuyghen nootwendich eueredelick geleyt moeten zyn, om te myden de vercleende ende vergrootte ongebruyckelicke affcomsten der thoonen, ofte daer mosten soo veel banden syn alser redens der thoonen hier voor staen, dewelcke niet alleen groote swaricheyt int spelen soude maecken, maer de banden souden oock soo nae by malcanderen comen te liggen datmense met de vingeren niet soude connen onderscheyden derhaluen de eueredelycke deeling niet te vergeeffs, maer oock nootwendich is; maer met de clauesingels ende orgels gaet het anders toe, want de spleten ofte anders geseyt, fenten steken tusschen de ander clauieren soo veel hooger uyt datmense bequaemelick kan raecken (als men wil) sonder d'ander clauieren te roeren, ende de clauieren behouden euentwel haer behoirlicke grootte, alsoo datmen bequamelick met een handt de achste kan ouervatten, ende de vercleende ende vergrootte thoonen kanmen bequamelick door hulp der spleten mijden, dwelck in ander speeltuyghen (diens thoonen door banden onderscheyden werden) niet geschieden en kan, want d'eene bant niet hooger kan liggen als d'ander, maer aleuen hooch op de rye, alsoo dat beyde de verdeelingen nootwendig syn.

BIJLAGE D.

(Behoort bij Bijlage C.)

De Reden der Vijffde om het Orgel ofte Clauesingel nae te stellen mach sijn eene van de 4 naevolgende.

✓ (3) 10 tot ✓ (3) 3.

✓ (4) 5 tot 1.

✓ (5) 15 tot ✓ (5) 2.

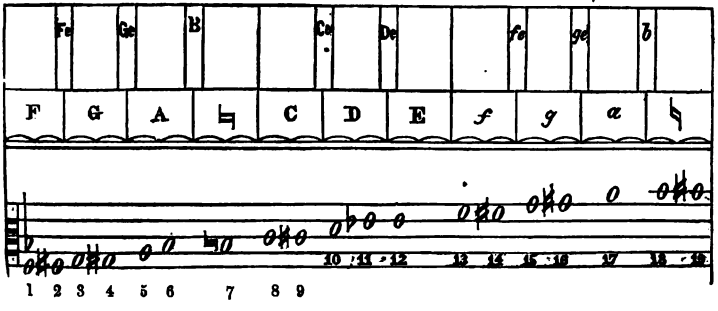
✓ (7) 50 tot ✓ (7) 3.

De Redens der andere Thoonen als vierde, derde, etc syn licht door Vergaring ende Aftreckinge te vinden.

BIJLAGE E.

(Behoort bij Bijlage A.)

Eerwaerdige zeer wijse ende geeerde Mr. Simon Steuin.



De *) afcomsten der thoonen met de waere Redens van dien syn de navolgende.

Selfthoon is van . . . . . 1 tot 1
Cleen halffthoon is van . . . . . W 78125 tot 16.
Groote halffthoon is van . . . . . 8 tot W 3125.
Thoon is van. . . . . √5 tot 2.
Cleene derde is van. . . . . 4 tot W 125.
Groote derde is van. . . . . 5 tot 4.
Vierde is van . . . . . 2 tot W 5.
Vyfde is van . . . . . W 5 tot 1.
Cleene seste is van . . . . . 8 tot 5.
Groote seste is van. . . . . W 125 tot 2.
Cleene seuenste is van . . . . . 4 tot √5.
Groote seuenste is van . . . . . W 3125 tot 4.
Achste is van. . . . . 2 tot 1.

Nu ouermidts inde verdeelinghe der sanghlyn ons eenighe ongebruyckelycke affcomsten der thoonen ontmoeten (de selue verdeelinghe beginnende van F ofte van G ofte van C ghelyckt behoirlick is) soo sal ick de selue hier mede stellen eerst de onghebruyckelycke affcomsten der thoonen aldus bepalende.

Onghebruyckelycke afcomsten der Thoonen zyn die welckers geluyden een cleene halfthoon vermeerdert ofte vermindert zyn.

Dese Thoonen syn onghebruyckelyck om datmense met gheen seecker oirdeel en kan singhen, ende werden gheseyt vergroot ofte vercleent.

---

*) *Species.*

De ongebruykelycke afcomsten der thoonen tot de verdeelinge der sanglyn noodich zynde met de Redens van dien syn de navolgende

Vergrootte thoon is van . . . . . W 1953125 tot 32.
Driethoon ofte vergrootte vierde is van . √125 tot 8.
Vergrootte vyffde ofte vierthoon is van . 25 tot 16.

De verdeelinghe van F beginnende men moet de navolgende Redens gebruycken.

Selfthoon is van	10000	tot	10000
Cleene halffthoon is van	10000	tot	9570
Thoon is van	10000	tot	8944
Vergrootte thoon is van	10000	tot	8560
Groote derde is van	10000	tot	8000
Vierde is van	10000	tot	7477
Driethoon is van	10000	tot	7155
Vijffde is van	10000	tot	6687
Vierthoon ofte vergrootte vyffde is van .	10000	tot	6400
Groote seste is van	10000	tot	5981
Cleene seuenste is van	10000	tot	5590
Groote seuenste is van	10000	tot	5350
Achste is van	10000	tot	5000

[NB. De schrijver heeft dergelijke tafeltjes opgemaakt, doch niet ingevuld, met de titels:

De verdeelinghe van C beginnende men moet gebruycken de volghende Redens.

en

De verdeelinghe van G beginnende men moet ghebruycken de volgende Redens.]

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXVII. Van de Molens, door Simon Stevin; en over een ander werk van hem.

1. In het vorige N°. XXVI werd gewag gemaakt van een paar werken van Simon Stevin; deze willen wij nu nader behandelen. Zij zijn niet zoo geheel onbekend als de »Spiegelingh der Singconst", daar zij gedeeltelijk reeds zijn afgedrukt; maar toch moge de overdruk van het eerste hier wel gerechtvaardigd zijn, omdat daarvan althans een gedeelte slechts bekend was.

2. Dit eerste werk heeft tot titel »Stevin || vande Molens || *Gereviceert doorden Professor* || *Golius* || 1634", en bevat de »overslach" van 19 molens (door mij genummerd van [1] tot [19]) met een »Vertooch" aan het einde.

In het »Wisconstigh Filosofisch Bedrijf" van den zoon Hendrik Stevin [zie Bouwstoffen XXV, Noot 36] vindt men in het »X. Boec || *VANDEN HANDEL* || Der || Watermolens onses Vaders Simon Stevin" in het »Tweede onderscheyt || *Vant* 10 *Boec* || Van Watermolens na de oude manier", op blz. 10 en 13 onze overslagen Nr. [1] en [10] terug. Daarop volgt in voornoemd werk »Derde onderscheyt || *Vant* 10

Boec || Van Polderwatermolens nae de nieu- || we manier ons Vaders" en daarin vinden wij onze overslagen Nr. [14]—[19] terug op blz. 15—25. Ik heb echter gemeend ook deze hier te mogen overdrukken, omdat zij toch tot het geheel behooren, en juist den praktischen blik van den schrijver in zulk geheel eigenaardig daglicht plaatsen. Deze »nieuwe Manier" van STEVIN zelven, is eene soort van onbepaald vraagstuk: te stellen zekere aantallen van cammen en staven, en daaruit het aantal van de overige te vinden, opdat de aldus gebouwde molens een bepaalde drukking op ieder vierkante voet van het zeil geven. Het »Vertooch" aan het slot, dat bij HENDRIK STEVIN niet voorkomt, heb ik mede afgedrukt.

3. Omtrent het tweede »VERRECHTING || VAN DOMEINE || METTE CONTREROLLE || VAN DIEN || BE*schreven door* || Simon Stevin || *van Brugghe*", dat tusschen de bladen van de »Spiegeling der Singconst" gevonden wordt, valt het volgende op te merken. Het is bekend, dat deze »Verrechting" het tweede deel uitmaakte van SIMON STEVIN's »Materiae Politicae. Bvrgherlicke stoffen Leijden. JVSTVS LIVIVS (1650) 4°." [zie Bouwstoffen XXV, Noot 34 en 34*a*]. Hier vindt men slechts de »Cortbegrijpen": en wel achtereenvolgens

Van het geheele werk, zie de aangehaalde »Materiae Politicae", blz. 1.

Van het eerste deel, zie aldaar blz. 15, 16.

Van het tweede deel, zie aldaar blz. 41, 42.

Daarop volgt die van het eerste deel des Anhangs »GHEMEENE REGEL || *Vande weerde der granen* || *en Landen jnt ansien* || *der maten*," zie het aangehaalde werk blz 127, 128. Hierbij treft men een klein verschil aan, waaruit m. i. blijkt dat ons stuk ouder is dan het gedrukte. Wij lezen hier toch in het Cortbegrijp »Tot verclaring deses handels sal ick beschrijven vijf hooftsticken", terwijl in de »Materiae Politicae" het Cort Begrijp spreekt van »vier Hooftsticken". Maar in ons handschrift, waar nu de inhoud der hoofdstukken opgeteekend staat, leest men bij het vijfde alleen het volgende. »Hier van is anders niet, doch meen dattet heel werck in de 4 hoofsticken begrepen is." STEVIN schijnt dus later van

deze verdeeling in vijf hoofdstukken te zijn teruggekomen. Dat hij of de verdeeling veranderd, of niet alles later in zijne »Materiae Politicae" heeft opgenomen, zoude men daaruit opmaken, dat in ons handschrift behalve twee titels (voorkomende op blz. 137 en 146 van het aangehaalde werk) nog voorkomt de titel »VOORBEELT DER || Capittelen 69, 70, 71, 72, 73 vande || Cockz Mitsgaders der Capittelen || 74, 75 vande Clames, soodie || mosten commen inde bereyding || en voltrecking der Contrerolle || van Oraigne des jaers 1628." In het gedrukte werk toch is er van zulke hoofdstukken geen sprake.

Stevin.

VANDE MOLENS

Gereviceert door den Professor

GOLIUS.

1634.

[1] Overslach der

Zuyt Nootdorpsche molen.

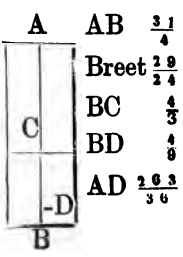
Langde der wiecke	$40\frac{1}{2}$	voet
Breede	$8\frac{1}{4}$	voet
Camrat boven	44	cammen
Schijfloop boven.	13	staven
Schijfloop beneen	10	staven
Camrat beneen	52	cammen
Camrats halfmiddellijn tot op tmiddel der cammen.	$\frac{31}{6}$	voet
Scheprats halft middellijn	$\frac{31}{4}$	voet
Breede der lepels	$\frac{29}{24}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{4}{3}$	voet
Verschil des hoochsten en leeghsten waters. .	4	voet

Hier uyt worden de volghende voorstellen beschreven.

1e voorstel.

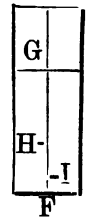
Te vinden met wat gewicht waters het scheprat verladen is, ende dat op eenich seker punt. Ick neem opt swaerheytsmiddelpunt des ghepranghs van het leeghste water.

De somme des wercx is dese, men sal vinden tghewicht tegen de lepel van achter persende, opt swaerheijts middelpunt des geprangs: daer na tghewicht datter van vooren perst, op een punt soo verre vanden as, als het swaerheijts middelpunt des gheprangs van tleeghste water daer af is.



Daer na ghetrocken tcleenste ghewicht vant grootste, de rest is tbegeerde. *Tghegheuen.* Laet AB d'een sijde des lepels beteeckenen, lanck alsboven $\frac{31}{4}$, breet $\frac{29}{24}$, ende BC sij de hooghde des binnewaters van $\frac{4}{3}$ ende BD $\frac{4}{9}$ sij het derdendeel van BC ende

D sal swaerheijtsmiddelpunt sijn des geprangs, deur het 18e voorstel der beghinselen des waterwichts, ende ghetrocken die $\frac{4}{9}$ van AB $\frac{31}{4}$, blijft voor AD $\frac{263}{36}$.



FG $\frac{16}{3}$
HF $\frac{16}{9}$
EH $\frac{215}{36}$
EI $\frac{263}{36}$

Laet nu EF dander sijde des lepels beteeckenen eñ FG sij de hoogde des buytewaters van $\frac{16}{3}$, want na luijt der beschriving hier voor, tbinnewater staet tegen de lepel hooch $\frac{4}{3}$ ende het buytewater noch 4 voet hoogher, maken tsamen als vooren $\frac{16}{3}$: Ende HF $\frac{16}{9}$ sij het derdendeel van FG, ende H sal swaerheijts middelpunt sijn des geprangs.

Ende ghetrocken HF $\frac{16}{9}$ van EF $\frac{31}{4}$, blijft voor EH $\frac{215}{36}$. Laet nu ghestelt worden het punt I, alsoo dat EI even sij an AD doende $\frac{263}{36}$. *Tbegheerde.* Wij moeten vinden hoe veel gewichts de lepel vooren meer heeft dan achter, ende dat op D, ofte, welck tselve is, op 't punt I. *Twerck.* Ick vinde deur het 15e voorstel der beghinselen des waterwichts, dat teghen het lepeldeel BC, perst $\frac{29}{27}$ voet, wiens swaerheijts middelpunt des geprangs is D. Teghen het lepeldeel F G perst $\frac{3712}{216}$ voet, ende dat opt swaerheijts middelpunt H, de selve doen an I $\frac{3034}{216}$, want ick segh E I $\frac{263}{36}$ gheven $\frac{3712}{216}$, wat EH $\frac{215}{36}$? comt alsvooren $\frac{3034}{216}$ voet, die weghen (rekenende 65 £ voor de voet) 913 £, daer af ghetrocken de bovengeschreven $\frac{29}{27}$ voet, wegende 69 £, blijft voor tbegeerde 844 £, dieder perssen opt punt I inde selfde hoogde van tswaerheijts middelpunt D, des geprangs van tleegste water.

2e VOORSTEL.

Te vinden wat reden de keeren der wiecken, teghen de keeren des scheprats hebben.

Ick menichvuldighe doenders met doenders, als 44 cammen

van boven, met 10 staven van beneen, comt 440, daer na lijders met lijders, als 13 staven van boven, met 52 cammen van beneen (want sulck is de meenichte der cammen en staven deur de voorgaende beschrivingh van dien) comt 676, ende de reden den uytbrenghs der lijders als 676, totten uytbrengh der doenders als 440, is de begeerde reden vande keeren der wieken tottet scheprat, dat is, de wiecken $\frac{676}{440}$ mael, ofte $1\frac{59}{110}$, tegen tscheprat eens.

3e VOORSTEL.

De ghewelt van yder voet seijls te vinden.

Tmiddel vande wieck is 20¼ voet vant middel vanden as, daerom sullen wij vinden tghewicht daer tscheprat mede verladen is, oock op 20¼ voet van tmiddel vande wateras, seghende 20¼ voet vande halve wieck, gheeft 844 £ persinghe, wat AD $\frac{263}{36}$? comt 304 £; Nu soo de wiecken even soo dickwils draeijden als tscheprat, soo soude de macht der wiecken sijn van 304 £, maer sij draeijen $\frac{676}{440}$ maer [sic] soo rasch, deur het 2e voorstel, daerom gedeelt 304 £ deur die reden der keeren als $\frac{676}{440}$, comt voor de macht der wiecken evestaltwichtich teghen de last des scheprats 197 £. Nu moet ick hebben de vlacke grootheijt der vier wiecken, daerom menichvuldighe ick haer langde deur breede, dats 40½ voet deur 8¼ (soo langch ende breet sijnse deur de voorgaende beschrijvinghe) — maect $\frac{2673}{8}$ voet, voor een wieck, de selve vier mael, comt voor de vier wiecken 1336½ voet, der selver ghewelt is van 197 £. daerom gerekent 16 oncen opt pont, soo comt yder voet seyls te doen de gewelt van $2\frac{480}{1336}$ oncen.

4e VOORSTEL.

Te vinden hoe stijf de stauen teghen de cammen perssen.

Aengesien dat opt swaerheyts middelpunt des leeghsten waters, dats op $\frac{263}{36}$ voeten van tmiddel vanden as, perst 844 £ deur het je voorstel ende dat het middel vande cammen na de voorgaeñ beschrijvinghe $\frac{31}{6}$ voet van tmiddel van den as is, soo segh ick, $\frac{31}{6}$ gheeft 844 £, wat $\frac{263}{36}$ voet van AD? comt 1193 £, ende soo stijf perssen de staven teghen de cammen des ondersten camrats opt middel der cammen berekent.

Om voort te vinden hoe stijf de bovenste staven tegen de cammen perssen, jck segh: ghelijck de middellijn des schijfloops beneden, tot de middellijn des schijfloops boven, alsoo de perssinge boven, tot de persinge beneden.

5e VOORSTEL.

Te vinden hoe veel waters datter met elcken keer der wiecken deurgaet, als tbinnenwater op sijn somerpeyl is.

Want des scheprats half middellijn doet $\frac{31}{4}$, ende de breede der lepels $\frac{29}{24}$, soo is tgeheel lichaem (te weten den ronden pilaer beschreven deur een keer der lepels) groot 228 voet. Hier af moet ghetrocken sijn het middeldeel des scheprats datter buyten het binnewater gaet, tselve deel is een ronde pilaer diens gront halfmiddellijn AC doet $\frac{77}{12}$, tselve lichaem is groot 156 voeten, die getrocken vande voorsz. 228 voet blijft 72 voet. Dit gaet eens om in $\frac{676}{440}$ keeren der wiecken; daerom ghedeelt 72 deur $\frac{67}{440}$, comt met elcken keer der wiecken 46 voeten waters.

[2] Overslach der

Noort Nootdorpsche molen.

Langde der wiecke	$40\frac{1}{2}$	voet
Breede	$8\frac{1}{4}$	voet
Camrat boven	48	cammen
Schijfloop boven.	13	staven
Schijfloop beneen	9	staven
Camrat beneen . . . , ...	53	cammen
Camrats halfmiddellijn tot opt middel der cammen.		
Scheprats half middellijn	$7\frac{11}{12}$	voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{6}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{4}{8}$	voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters.	4	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

[NB. is niet ingevuld, denkelijk omdat een getal niet is opgegeven].

[3] Overslach der

Westescamp molen.

Langde der wiecken	33	voet
Breede	$8\frac{10}{12}$	voet
Camrat boven	52	cammen
Schijfloop boven.		
Schijfloop beneen		
Camrat beneen. . . . . , ...		
Camrats halfmiddellijn tot opt middel der cammen.		
Scheprats halfmiddellijn	$6\frac{1}{6}$	voet
Breede der lepels		
Commen onder tpeijl..	$1\frac{7}{12}$	voet
Verschil des hoochsten en̄ leeghsten waters. .	$3\frac{10}{12}$	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

[NB. niet ingevuld, denkelijk omdat er opgaven ontbreken].

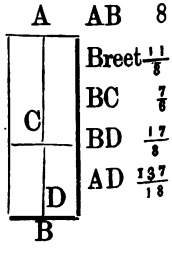
[4] Overslach der

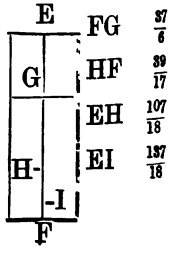
Pynackersche molen aen de brugghe.

Langde der wiecke	41	voet
Breede	$7\frac{1}{2}$	voet
Camrat boven	50	cammen
Schijfloop boven	13	staven
Schijfloop beneen	10	staven
Camrat beneen	53	cammen
Camrats half middellijn tot op tmiddel der cammen.		
Scheprats half middellijn	8	voet
Breede der lepels	$\frac{11}{8}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{7}{6}$	voet
Verschil des hoochsten en̄ leeghsten waters . .	5	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{539}{576}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{15059}{576}$ voet ende dat op H, die doen an I $\frac{2900363 4}{1420416}$ want ick segh EI $\frac{137}{18}$ gheven $\frac{15059}{576}$ wat EH $\frac{107}{18}$? comt als vooren $\frac{2900363 4}{1420416}$ voet die weghen 1327 £ daer af getrocken de $\frac{539}{576}$ voet, weghende 60 £ blijft 1267 £ daer tscheprat mede verladen opt swaerheyts middelpunt des leeghsten waters als D.





De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

$20\frac{1}{2}$ voet halve wieck gheeft 1267 £ persinge wat AD $\frac{137}{18}$? comt 470 £ die gedeelt deur reden der keeren $\frac{689}{500}$ comt 341 £ die ghedeelt deur 1230 voet der vier seylen comt yder voet seyls te doen de ghewelt van $4\frac{536}{1230}$ oncen.

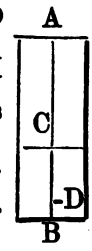
[5] Overslach der

Nieu achtcante molen byden Hage.

Langde der wiecke	$38\frac{1}{3}$	voeten
Breede.	$8\frac{1}{4}$	voet
Camrat boven.	51	cammen
Schijfloop boven.	12	staven
Schijfloop beneen	10	staven
Camrat beneen	53	cammen
Camrats halfmiddellijn tot opt middel der cammen.		
Scheprats half middellijn.	$6\frac{1}{3}$	voet
Breede der lepels	$\frac{17}{12}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{7}{4}$	voet
Verschil des hoochsten en leeghsten waters . .	3	voet

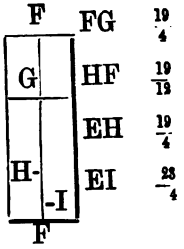
Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{833}{384}$ voet ende dat op D die doen an I $\frac{466412}{35328}$ want ick segh EI $\frac{23}{4}$ gheven $\frac{6137}{384}$ voet, wat EH $\frac{19}{4}$? comt alsvoo- ren $\frac{466412}{35328}$ voet die weghen 858 £ daer af



AB	$\frac{19}{3}$
Breet	$\frac{17}{12}$
BC	$\frac{7}{4}$
BD	$\frac{7}{12}$
AD	$\frac{23}{4}$

getrocken de $\frac{833}{384}$ voet weghende 141 £ blijft 717 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheyts middelpunt des leeghsten waters als D.



De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

19 $\frac{1}{6}$ voet halve wieck gheeft 717 £ persinge wat AD $\frac{23}{4}$? comt 215 £, die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{636}{510}$ comt 172 £ die gedeelt deur 1265 der vier seylen comt yder voet seyls te doen de geweld van $2\frac{222}{1265}$ oncen.

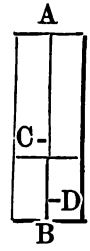
[6] Overslach der

Craylinger achtcante molen.

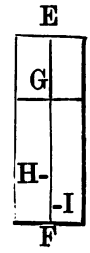
Langde der wiecke	35½	voet
Breede	7½	voet
Camrat boven.	53	cammen
Schijfloop boven	12	staven
Schijfloop beneen	9	staven
Camrat beneen	52	cammen
Camrats half middellijn tot opt middel der cammen.	4	voet
Scheprats half middellijn	7⅚	voet
Breede der lepels	1	voet
Commen onder tpeijl	1⅛	voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters. .	4	voet

Hieruyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{8}{9}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{128}{9}$ voet ende dat op H die doen an I $\frac{251136}{21456}$ [lees: 21546] want ick segh EI $\frac{133}{18}$ gheven $\frac{128}{9}$ wat EH $\frac{109}{18}$ comt alsvooren $\frac{251136}{21546}$ voet die weghen 757 £ daer af getrocken de $\frac{8}{9}$ £ [lees: voet] weghende 57 £ blijft 700 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.



AB	$\frac{47}{6}$
Breet	1
BC	$\frac{4}{3}$
BD	$\frac{4}{9}$
AB [lees: AD]	$\frac{133}{18}$



FG	$\frac{16}{3}$
HF	$\frac{16}{9}$
EH	$\frac{109}{18}$
EI	$\frac{133}{18}$

De ghewelt van yder voet seijls te vinden.

$17\frac{3}{4}$ voet, halve wieck, geeft 700 £ persinge wat AD $\frac{133}{18}$? comt 291 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{208}{159}$ comt 222 £ die ghedeelt deur 1065 voeten der vier seijlen, comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{357}{1065}$ oncen.

[7] Overslach der

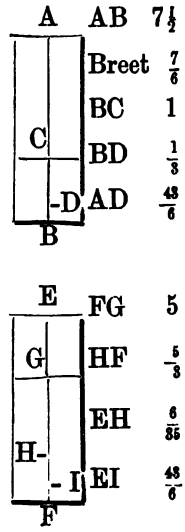
Craylingher Wipmolen.

Langde der wiecke	34 voet
Breede.	$7\frac{1}{2}$ voet
Camrat boven	47 cammen
Schijfloop boven	12 staven
Schijfloop beneen.	
[Camrat beneen]	56 cammen

Camrats half middellijn tot opt middel der cammen. $5\frac{1}{4}$ voet
Scheprats half middellijn . . . . . $7\frac{1}{2}$ voet
Breede der lepels . . . . . $1\frac{1}{6}$ voet
Commen onder tpeijl . . . . . 1 voet
Verschil des hooghsten ende leeghsten waters . . . 4 voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{7}{12}$ voet ende dat op D. Tegen FG perst $\frac{175}{12}$ voet ende dat op H, die doen an I $\frac{36750}{3096}$ want ick segh EI $\frac{43}{6}$ gheven $\frac{175}{12}$ wat EH $\frac{35}{6}$? comt alsvooren $\frac{36750}{3096}$ voet die weghen 771 £ daer af getrocken de $\frac{7}{12}$ voet weghende 38 £, blijft 733 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.



De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

17 voet halve wieck gheeft 733 £ persinge wat AD $\frac{43}{6}$? comt 309 £ die ghedeelt deur $\frac{672}{423}$ reden der keeren comt 194 £, die ghedeelt deur 1020 voet der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{44}{1020}$ oncen.

[8] Overslach der

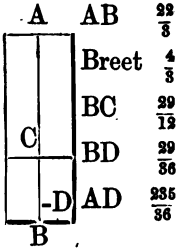
Leeghste staende Broucksche molen by Ysselsteyn.

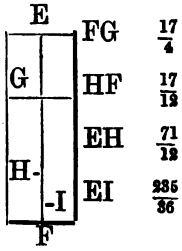
Langde der wiecke . . . . . 37 voet
Breede . . . . . $7\frac{1}{3}$ voet
Camrat boven . . . . . 44 cammen

Schijfloop boven	13 staven
Schijfloop beneen.	10 staven
Camrat beneen	48 cammen
Camrats half middellijn tot opt middel der cammen.	$4\frac{2}{3}$ voet
Scheprats half middellijn.	$7\frac{1}{3}$ voet
Breede der lepels.	$1\frac{1}{3}$ voet
Commen onder tpeijl.	$2\frac{5}{12}$ voet
Verschil des hooghsten ende leeghsten waters.	$1\frac{10}{12}$ voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{1682}{432}$ voet ende dat op D
Teghen FG perst $\frac{289}{24}$ voet ende dat op H
die doen an I $\frac{738684}{67680}$ want ick segh EI $\frac{235}{36}$
gheven $\frac{289}{24}$ wat EH $\frac{71}{12}$? comt alsvooren $\frac{738684}{67680}$
voet die weghen 709 £ daer af getrocken
de $\frac{1682}{432}$ voet weghende 253 £ blijft 456 £
daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.





De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

$18\frac{1}{2}$ voet halve wieck gheeft persinghe 456 £ wat AD $\frac{235}{36}$? comt 160 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{624}{440}$ comt 112 £, die ghedeelt deur 1073 voet der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $1\frac{719}{1073}$ oncen.

[9] Overslach der

Hoochst staende Broucksche molen by Ysselsteijn.

Langde der wiecke	36 voet
Breede	$7\frac{1}{4}$ voet
Camrat boven	45 cammen
Schijfloop boven	12 staven
Schijfloop beneen	9 staven
Camrat beneen	5[0] cammen
Camrats half middellijn tot opt middel der cammen.	$4\frac{7}{12}$ voet
Scheprats half middellijn	$6\frac{11}{12}$ voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{2}$ voet
Commen onder tpeijl	$1\frac{3}{4}$ voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters	$2\frac{2}{3}$ voet

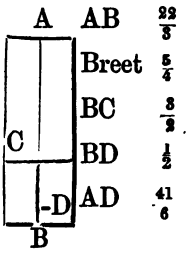
[10] Overslach der

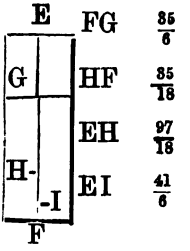
Ghinste molen in Sarlois.

Langde der wiecke	$33\frac{1}{2}$ voet
Breede	$7\frac{1}{2}$ voet
Camrat boven	51 cammen
Schijfloop boven	14 staven
Schijfloop beneen	10 staven
Camrat beneen	63 cammen
Scheprats half middellijn	$7\frac{1}{8}$ voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{4}$ voet
Commen onder tpeijl	$1\frac{1}{2}$ voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters	$4\frac{1}{3}$ voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{45}{32}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{6125}{288}$ voet ende dat op H die doen an I $\frac{3564750}{212544}$ want ick segh EI $\frac{41}{6}$ gheven $\frac{6125}{288}$ wat EH $\frac{97}{18}$? comt alsvooren $\frac{3564750}{212544}$ voet die weghen 1090 £ daer af getrocken de $\frac{45}{32}$ voet weghende 91 £ blijft 999 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leechsten waters als D.





De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

$16\frac{3}{4}$ voet halve wieck gheeft 999 £ persinge wat AD $\frac{41}{6}$? comt 407 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{882}{510}$ comt 235 £ die ghedeelt deur 1005 voet der vier wiecken comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{745}{1005}$ oncen.

[11] Overslach der

Streefkercksche middel molen.

Langde der wiecke	38	voet
Breede	$7\frac{1}{2}$	voet
Camrat boven		
Schijfloop boven.		
Schijfloop beneen		
Camrat beneen		
Scheprats half middellijn	$7\frac{1}{2}$	voet
Breede der lepels		
Commen onder tpeijl	$2\frac{3}{4}$	voet
Verschil des hoochstens ende leeghsten waters . .	$2\frac{1}{2}$	voet

[12] Overslach der

Beyersche molen te Stolck.

Langde der wiecke	
Breede	
Camrat boven	47 cammen
Schijfloop boven	13 staven
Schijfloop beneen	9 staven
Camrat beneen	47 cammen
Scheprats half middellijn	$6\frac{1}{2}$ voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{3}$ voet
Commen onder tpeijl	$\frac{11}{6}$ voet
Verschil des hoochsten en̄ leeghsten waters . .	3 voet

[13] Overslach der

Molen opt hof van Delf.

Langde der wiecke	35 voet
Breede	8 voet
Camrat boven	48 cammen
Schijfloop boven	13 staven
Schijfloop beneen	9 staven
Camrat beneen	56 cammen
Scheprats half middellijn	7 voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{6}$ voet
Commen onder tpeijl	$\frac{13}{12}$ voet
Verschil des hooghsten en̄ leeghsten waters . .	$4\frac{1}{2}$ voet

[14] Overslach der

Molen tot Escamp na de nieu manier.

Langde der wiecke	$33\frac{1}{2}$ voet
Breede	10 voet
Scheprats half middellijn	8 voet

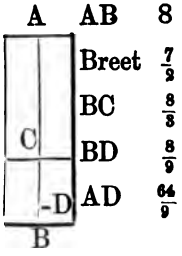
Breede der lepels . . . . . $3\frac{1}{2}$ voet

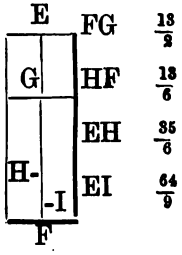
Commen onder tpeijl . . . . . $2\frac{2}{3}$ voet

Verschil des hoochsten ende leeghsten waters . . . $3\frac{5}{6}$ voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{112}{9}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{1183}{16}$ [voet] ende dat op H die doen [an] I $\frac{372645}{6144}$ want ick segh EI $\frac{64}{9}$ gheven $\frac{1183}{16}$ wat EH $\frac{35}{6}$? comt alsvooren $\frac{372645}{6144}$ voet die weghen 3942 [£] daer af getrocken de $\frac{112}{9}$ voet weghende 809 £ blijft 3133 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.





Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tot het scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van 3 oncen.

Ick vinde eerst de platte grootheijt der vier wiecken meenichvuldighende de langde $33\frac{1}{2}$ deur de breede 10 maect voor den wieck 335 die viermael comt voor de vier wiecken 1340 voeten, de selve menichvuldighe ick met de 3 oncen, comt voor de ghewelt der vier wiecken 251 £ ende dit opt middelpunt der wiecke dats op $16\frac{3}{4}$ voet van tmiddel vanden as Nu soo tpunt D des gheprangs der 3133 £ oock waer $16\frac{3}{4}$ voet van tmiddel vande wateras soo soudemen segghen de reden der keeren te moeten wesen van 3133 £ tot 251, maer dat gheprang op D alleenlick wesende $\frac{64}{9}$ voet van

tmiddel vanden as, soo moeten wij dat vinden op $16\frac{3}{4}$ voet seggende $16\frac{3}{4}$ gheven 3133 wat $\frac{64}{9}$? comt 1330. Ic segh dan dat de reden der keeren moet sijn van 1330 tot 251, daerom ghedeelt 1330 deur 251 comt $5\frac{75}{251}$ ende soo menichmael sullen de wiecken moeten ommegaen teghen tscheprat eens.

Te veroirdenen de menichte van cammen en staven om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden der keeren van 1330 *tot* 251.

Ghenomen dat ick aensiende de grootheijt des camrats ende de behoirlicke dickte der cammen ende der staven die daer tussen commen moeten, soo veroirden ick het camrat beneen met 47 cammen, het schijfloop daertoe met 12 staven ende het schijfloop aende wieckas met 16 staven. Vrage hoe veel cammen het croonradt sal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te crijghen. Ick stelle de voornomde [sic] 16. 12 en 47 in oirden ende 0 ter plaets daer tgetal der begheerde cammen moet staen als hier onder segghende 16 mael 12 is 192, die stel ick daer neven aldus:

16. 12. 192
0. 47.

Nu ist kennelick dat ter plaets van 0 een getal moet staen soodanich dattet selve ghemenichvuldicht met 47 gheven den uytbrengh die sulcken reden hebben tot 192 als 1330 tot 251. Om tselve te vinden ick segghe 251 gheeft 1330 wat 192? comt 1017 die stel ick onder de 192. Nu aenghesien tgetal ter plaets van 0 ghemenichvuldight met 47 moet maken 1017, soo deel ick 1017 deur de 47 comt ten naesten bij 21 ende soo veel cammen sal het croonrat

hebben. Ende de ghestalt der werckinghe sal sijn als hier onder

16. 12. 192
21. 47. 1017.

Doch alsoo 21 mael 47 maer uytenbrenghen 987, soo en salder eijghentlicke reden der keeren int ghemaeckte werck maer sijn van 987 tot 192 als hieronder

16. 12. 192
21. 47. 987.

Ick segghe dan dattet schijfloop aende wieckas
sal hebben . . . . . 16 staven
het croonrat . . . . . 21 cammen
het schijfloop beneen . . . . . 12 staven
het camrat beneen . . . . . 47 cammen
Ende tselve camrat ghemaect wesende soo is
sijn half middellijn tot opt middel der cammen. $5\frac{1}{2}$ voet.

Proef.

Somen nu den proef wil doen ende sien of yder voet wiecks hier mede de begheerde ghewelt uytbrenght ten naesten bij van 3 oncen men doe na de leeringhe des 3en Voorstels int je overslach aldus.

$16\frac{3}{4}$ voet halve wieck gheeft 3133 £ persinge, wat AD $\frac{64}{9}$? comt 1330 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{987}{192}$ comt 258 £ die ghedeelt deur 1340 voet der vier wiecken comt yder voet wieck te doen de ghewelt van $3\frac{108}{1340}$ oncen.

Het is wel waer datter maer begheert en was 3 oncen doch dit verschil is soo cleen dat bij aldienmen int croonrat maeckt een cam meer en stelde als 22 cammen, soo soudet dan min vallen als 3 oncen, te weten $2\frac{1256}{1340}$ oncen.

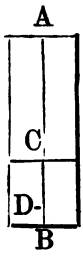
[15] Overslach der

Stolwycksche molen na de nieu manier.

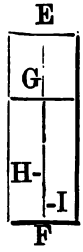
Langde der wiecke	40	voet
Breede	$9\frac{1}{2}$	voet
Scheprats half middellijn	$10\frac{1}{6}$	voet
Breede der lepels	$3\frac{1}{2}$	voet
Commen onder tpeijl	$4\frac{1}{6}$	voet
Verschil des hoochsten en̄ leeghsten waters	4	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{4375}{144}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{16807}{144}$ voet ende dat op H die doen aen I $\frac{10134621}{102384}$ want ick segh EI $\frac{79}{9}$ gheven $\frac{16807}{144}$ wat EH $\frac{67}{9}$? comt alsvooren $\frac{10134621}{102384}$ voet die weghen 6434 £ daer af getrocken de $\frac{4375}{144}$ voet weghende 1974 £ blijft 4460 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.



AB	$\frac{61}{6}$	
Breet	$\frac{7}{2}$	
BC	$\frac{25}{16}$	[lees $\frac{25}{6}$]
BD	$\frac{25}{18}$	
AD	$\frac{78}{9}$	[lees $\frac{79}{9}$]



FG	$\frac{49}{6}$
HF	$\frac{49}{18}$
EH	$\frac{67}{9}$
EI	$\frac{79}{9}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van $3\frac{1}{4}$ oncen.

1520 voet der vier seijlen gemenichvuldicht met $3\frac{1}{4}$ oncen comt 308 £. Voort 20 voet halve wieck gheeft 4460 £ des gheprangs wat AD $\frac{79}{8}$ [lees $\frac{79}{9}$]? comt 1957 daerom segh ick dat de reden der keeren sal sijn van 1957 tot 308.

Te veroirdenen de menichte van cammen en stauen om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden der keeren van 1957 *tot* 308.

Ghenomen voor tschijfloop aende wieckas, 12 staven voor tschijfloop beneen 8 staven, voor tcamrat beneen 43 cammen.

Vraghe hoe veel cammen het croonrat sal moeten hebben om de begeerde reden der keeren te crijghen?

Ick segh 12 mael 8 is 96. Voort 308 minste pael gheeft 1957 meeste pael wat 96? comt 609 die ghedeelt deur de 43 cammen comt voort croonrat 14 cammen.

Dese 12 staven boven 14 cammen int croonradt, 8 staven beneen ende 43 cammen int camrat brenghen uyt reden der keeren van 301 tot 48.

Prouf.

Om nu te sien of yder voet seijls hiermede de begheerde ghewelt uyt brenght ten naesten bij van $3\frac{1}{4}$ oncen, ick segh 20 voet halve wieck gheeft 4460 £ persinge wat AD $\frac{79}{9}$? comt 1957 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{301}{48}$ comt 312 £ die ghedeelt deur de 1520 voeten der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{432}{1520}$ oncen.

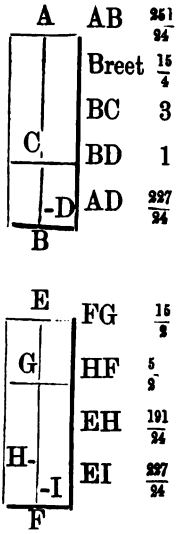
[16] Overslach der

Brouckscke molen by Yselsteyn na de nieu manier.

Langde der wiecke	39	voet
Breede . . . . . , ...	10	voet
Scheprats half middellijn	$10\frac{11}{24}$	voet
Breede der lepels	$3\frac{3}{4}$	voet
Commen onder tpeijl	3	voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters. . .	$4\frac{1}{2}$	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{135}{8}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{3375}{32}$ voet ende dat op H die doen aen I $\frac{15471000}{174336}$ want ick segh EI $\frac{227}{24}$ gheven $\frac{3375}{32}$ wat EH $\frac{191}{24}$? comt alsvooren $\frac{15471000}{174336}$ voet die weghen 5768 £ daer af getrocken de $\frac{135}{8}$ voet weghende 1096 £ blijft 4672 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leegchsten waters als D.



Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van 3¾ oncen.

1560 voet der vier seijlen gemenichvuldicht met 3¾ oncen comt 365 £ voort 19½ voet halve wieck gheeft 4672 £ des gheprangs wat AD $\frac{227}{24}$? comt 2266, daerom segh ick dat de reden der keeren sal sijn van 2266 tot 365.

Te veroirdenen de menichte van cammen en stauen om te crijghen ten naesten bij de boueschreuen reden van 2266 *tot* 365.

Ghenomen aende wieckas 16 staven, voor tschijfloop beneen 8 staven, voor tcamrat beneen 45 cammen. Vraghe hoe veel cammen het croonrat zal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te krijghen?

Ick segh 16 mael 8 is 128. Voort 365 minste pael gheeft 2266 meeste pael wat 128? comt 794 die ghedeelt

deur de 45 cammen comt voor tcroonrat 17 $\frac{29}{45}$ daer ick voor neem 18 cammen.

Dese 16 staven boven, 18 cammen int croonrat, 8 staven beneen ende 45 cammen int camrat brengen uyt reden der keeren van 810 tot 128.

Prouf.

Om nu te sien of yder voet seijls hier mede de begheerde ghewelt uytbrenght ten naesten bij van $3\frac{3}{4}$ oncen ick segh $19\frac{1}{2}$ voet halve wieck gheeft 4672 £ persinge, wat AD $\frac{227}{24}$? comt 2266 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{810}{128}$ comt 362 £ die ghedeelt deur de 1560 voeten der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{1112}{1560}$ oncen.

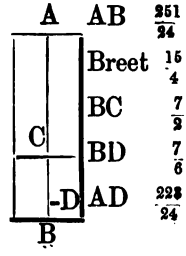
[17] Overslach der

Craeylingher molen na de nieu manier.

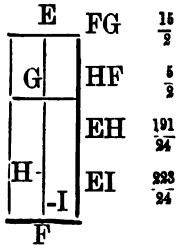
Langde der wiecke	39	voet
Breede	10	voet
Scheprats half middellijn	$10\frac{11}{24}$	voet
Breede der lepels	$3\frac{3}{4}$	voet
Commen onder tpeijl	$3\frac{1}{2}$	voet
Verschil des hoochsten en leeghsten waters . . .	4	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{735}{32}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{3375}{32}$ voet ende dat op H die doen aen I $\frac{15471000}{171264}$ want ick segh EI $\frac{223}{24}$ gheven $\frac{3375}{32}$ wat EH $\frac{191}{24}$? commt alsvooren $\frac{15471000}{171264}$ voet die weghen 5871 £ daer af ge-



trocken de $\frac{735}{32}$ voet weghende 1492 £ blijft 4379 £ daer het scheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.



Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van

[niet verder ingevuld].

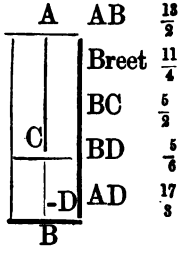
[18] Overslach der

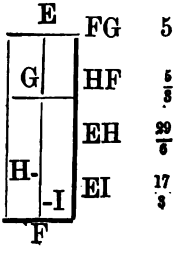
Robbenoirtsche molen na de nieu manier.

Langde der wiecke.	19	voet
Breede	10½	voet
Scheprats half middellijn	6½	voet
Breede der lepels	2¾	voet
Commen onder tpeijl.	2½	voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters . .	2½	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{275}{32}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{275}{8}$ ende dat op H die doen aen I $\frac{23925}{816}$ want ick segh EI $\frac{17}{3}$ gheven $\frac{275}{8}$ wat EH $\frac{29}{6}$? comt alsvooren $\frac{23925}{816}$ voet die weghen 1905 £ daer af getrocken de $\frac{275}{32}$ voet weghende 558 £ blijft 1347 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters, als D.





Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van $2\frac{3}{4}$ *oncen.*

798 voet der vier seijlen ghemenichvuldicht met $2\frac{3}{4}$ oncen comt 137 [£]. Voort $9\frac{1}{2}$ voet der halve wieck gheeft 1347 £ des gepranghs wat AD $\frac{17}{8}$? comt 803 [£], daerom segh ick dat de reden der keeren sal sijn van 803 tot 137.

Te veroirdenen de menichte van cammen en stauen om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden van 803 *tot* 137.

Zij ghenomen voor tschijfloop aende wieckas 12 staven, voor tschijfloop beneen 8 staven, voor tcamrat 35 cammen. Vraghe hoe veel cammen het croonradt sal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te crijghen?

Ick segh 12 mael 8 is 96, voort 137 minste pael gheeft 803 meeste pael wat 96? comt 562 die ghedeelt deur 35 cammen, comt voor tcroonradt 16 cammen.

Dese 12 staven boven, 16 cammen int croonradt 8 staven beneen en 35 cammen int camrat brenghen uyt reden der keeren van 560 tot 96.

Prouf.

Om nu te sien of yder voet seijls hiermede de begeerde gewelt uytbrengt ten naesten bij van $2\frac{3}{4}$ oncen. Ick segh $9\frac{1}{2}$ voet der halve wieck gheeft 1347 £ persinge wat AD $\frac{17}{8}$? comt 803 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{560}{96}$ comt 137 £ die ghedeelt deur de 798 voet der vier seylen comt yder voet seyls te doen de ghewelt van $2\frac{596}{798}$ oncen.

[19] Overslach der

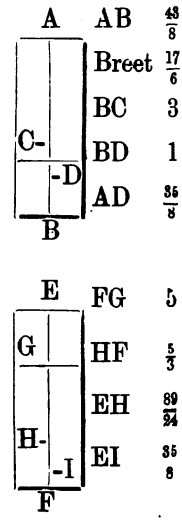
Molen tsoeterwoude na de nieu manier.

Langde der wieck . . . . . 16 voet

Breede	$5\frac{1}{2}$ voet
Scheprats half middellijn	$5\frac{3}{8}$ voet
Breede der lepels	$2\frac{5}{8}$ voet
Commen onder tpeyl	3 voet
Verschil des hoochsten en leeghsten waters	2 voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{153}{12}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{425}{12}$ voet ende dat op H, die doen aen I $\frac{30260}{1008}$ want ick segh EJ $\frac{35}{8}$ gheven $\frac{425}{12}$ wat EH $\frac{89}{24}$? comt alsvooren $\frac{30260}{1008}$ voet die weghen 1951 £ daer af getrocken de $\frac{153}{12}$ voet weghende 828 £ blijft 1123 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheyts middelpunt des leechsten waters als D.



Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van $2\frac{2}{3}$ oncen.

325 voet der vier seylen ghemenichvuldight met $2\frac{2}{3}$ oncen comt 58 £, voort 8 voet der halve wieck gheeft 1123 £ des gheprangs wat AD $\frac{35}{8}$? comt 614 daerom segh ick dat de reden der keeren sijn sal van 614 tot 58.

Te veroirdenen de menichte van cammen en staven om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden der keeren van 614 *tot* 58.

Ghenomen voor tcamrat aende wieckas 25 cammen het schijfloop onder aende groote spille 6 staven het sterrerat

daer in draeyende 20 cammen, het schijfloop beneden 8 staven, het camrat beneden 40 cammen. Vraghe hoe veel staven het schijfloop boven aende spille sal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te cryghen.

Ick segh 25 mael 6 is 150 de selve deur 8 maeckt 1200. Voort 58 minste pael gheeft 614 meeste pael wat 1200? comt 12703, die gedeelt deur 20 mael 40 dats deur 800 comt voor tschijfloop boven 15 $\frac{703}{800}$, daer voor ghenomen syn 16 staven.

Dese 25 cammen aende wieckas 16 staven int schijfloop boven, 6 staven onder int schijfloop aende groote spille, 20 cammen inde sterre acht staven int schijfloop beneen, 40 cammen int camrat beneen brenghen uyt reden der keeren van 32 tot 3.

Prouf.

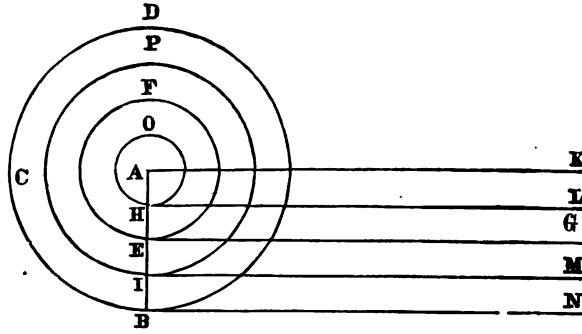
Om nu te sien of yder voet seyls hiermede de begeerde gewelt uytbrenght ten naesten by van $2\frac{2}{3}$ oncen ick segh 8 voet der halve wieck gheeft 1123 £ persinge wat AD $\frac{35}{8}$? comt 614 £, die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{32}{3}$ comt 57 £, die ghedeelt deur 352 voeten der vier seylen comt yder voet seyls te doen de ghewelt van $2\frac{208}{352}$ oncen.

Vertooch.

Wesende de halfmiddellijn eens ronts vast opt middelpunt, de reste draeijende int ront. Die cromme voortganck der halfmiddellijn is euen an een rechte voortganck soo lanck wesende als des halfmiddellijns middelpunts cromme voortganck.

Tghegheuen. Laet AB wesen de half middellijn des ronts BCD vast op des ronts middelpunt A ende draeijende van B na C van daer na D ende soo voorts tot datse weder

comt ter plaets daerse eerst begost ende den omtreck beschreven van des middellijns middelpunt E sij EF, laet voor EG een rechte lijn wesen rechthouckich op AB ende even aenden omtreck EF.



Tbegheerde. Wij moeten bewijsen dat den crommen voortganck der half middellijn AB int ront BCD even is aenden rechten voortganck derselve lijn van E tot G, dat is hoe wel het uijterste punt B der lijn AB den langhsten wech gaet ende alle andere punten een corter, te weten hoe naerder A hoe corter dat nochtans dien heelen crommen voortganck der lijn AB van C tot G (corter deelen met langer altsamen even sijn aenden rechten voortganck).

Tbereytsel. Laet gheteijckent worden het punt H int middel van AE ende I int middel van EB voor de lijnen AK, HL, IM, BN alle even ende evenwijdighe met EG daer na de lijn KN. Laet voort beschreven worden opt punt A de twee ronden HO ende IP deur de punten H ende I.

Tbewijs. Anghesien de halfmiddellijn AB ghedeelt is in vier even stucken als AH, HE, EI, IB, soo heeft inden omganck des selfden half middellijns yder stick sijn plat deel beschreven, welcke vier deelen altsamen makende het ront BCD sijn even aenden rechthouck AN deur het voorstel des . . . Archimedes. Boven dien soo sijn de ronde deelen vande selfde breede der rechte deelen want AH, HE, EI, IB sijn haer beijder ghemeene breeden, daerom ist nootsakelick die

vier cromme deelen altsamen vande selfde langde sijn als de vier rechte deelen des rechthoucx AN, want sonder dat sij en soudender niet even mede connen wesen twelck teghen tghestelde waer. *Besluyt* wesende dan de half middellijn eens ronts enz.

Ander telconstich bewys.

De langde der vier rechthoucken AL, HG, EM, IN altsamen ofte dattet selve is de langde der lijn AK viermael is corter dan de buytenste sijden altsamen der vier deelen daer tront BCD in gedeelt is, maer langher dan de binnenste sijden der selve vier deelen twelck aldus bewesen wort. Laet den omtreck OH doen 1 duym soo sal den omtreck EF doen 2 duym, want AE is dobbel aen AH ende om der ghelijcke reden sal den omtreck IP doen 3 duym ende den omtreck DB 4 duym, comt tsamen 10 duym. Nu alsoo de lijn AK even is aen tront EF doende 2 duym soo doet de lijn AK 2 duym de selve viermael maeckt 8 duym twelck (soo wij boven geseyt hebben) min is dan 10 duym der vier omtrecken. Ten anderen de vier binnenste syden der voornombde vier deelen daer tront BCD in gedeelt is als 3, 2, 1, 0 maken tsamen 6 duym die minder sijn dan de 8 duym der lijn AK viermael. Inder voughen dat soo wy gheseyt hebben de lijn AK viermael is corter dan de vier buytenste sijden der vier deelen daer het ront BCD in ghedeelt is maar langher dan de binnenste sijden der selver haer reden dan daer sijn in bestaen is 6. 8. 10. twelck in minder paelen comt 3. 4. 5.

Nu ghelyck wij deur deelinge der halfmiddellijn AB in vier even deelen hier gevonden hebben dese 3. 4. 5. alsoo sullen wij deur deelinghe in vyven vinden 4. 5. 6. ende

deur deelinghe in sessen 5. 6. 7. ende soo oirdentlick oneyndelick voort. Inder voughen, dat soomen van vooren aen begonde men soude vinden dusdanighen voortganck.

0.	1	2.
1.	2.	3.
2.	3.	4.
3.	4.	5.
4.	5.	6.
5.	6.	7.
6.	7.	8.
7.	8.	9.
8.	9.	10.
9.	10.	11.
10.	11.	12.

Waer uyt blijckt dat de some der rechte sijden altyt blijft tusschen de twee sommen der langhste en cortste cromme sijden; Twelck soo verstaen sijnde laet de rechte deelen $\frac{1}{1000}$ langher of corter sijn, waert meughelick dan de cromme. Om de contrari te bewysen. Ic deele de half middellijn AB deur de ghedacht in 10000 even deelen ende om de redenen hier boven verhaelt soo sullen de voornombde drie langden (te weten de some der cromme corste sijden de somme der rechte sijden ende de somme der cromme langhste sijden) bewesen in sulcken reden tot malcander als 9999, 10000, 10001, waer uyt blijckt dat de cromme langhste sijden maer $\frac{1}{10000}$ langher ende de cortste maer $\frac{1}{10000}$ corter en is dan de rechte twelck min is dan $\frac{1}{1000}$ soo wij bethoonen wilden. Het is dan kennelick dat soo die twee langden eenich verschil hadden, het soude moeten minder sijn dan meughelick is ghegheven te worden, maer sulck verschil is niet, daerom en verschillen de twee boveschreven langden niet ende vervolghens sijn even lanck.

Vertoogh.

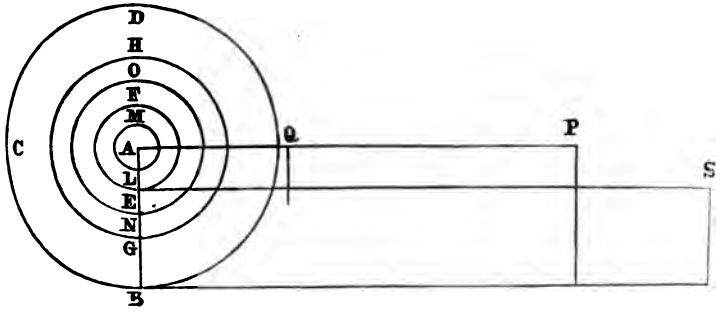
Wesende opt middelpunt eens ronts beschreuen noch een cleender omtreck. Het plat tusschen de twee omtrecken is euen aenden rechthouck begrepen onder het half middellijns deel staende tusschen die twee omtrecken ende een rechte lijn euen aenden omtreck beschreuen door tmiddelpunt van dat deel.

Tghegheuen. Laet A het middelpunt wesen des ronts BCD

diens halfmiddellijn AB ende opt selve punt A sij beschreven noch een cleender omtreck EF, ende EB sij het halfmiddellijnsdeel tusschen de twee omtrecken, ende G sij het middelpunt des selfden deels EB door welck punt G beschreven is het ront GH. Voort soo is de rechte lijn ES rechthouckich op AB ende even aenden omtreck GH.

Thegheerde. Wij moeten bewijsen dattet plat begrepen tusschen de twee omtrecken BD ende EF even is aenden rechthouck BS.

Thereytsel. Laet L wesen het middelpunt van AE ende daer deur beschreven worden tront LM voort N het middelpunt van AB ende daer deur het ront NO daer na AP rechthouckich op AB even aenden omtreck NO, sgelijcx AQ even aenden omtreck LM. Laet voort de langde van AB wesen 6 duym ende van EB 4 duym ende de reden des omtrecx tot haer middellijn sij van 22 tot 7. Volgende al twelck soo sal de lijn AP doen $\frac{132}{7}$ ende ES $\frac{126}{7}$ ende AQ $\frac{44}{7}$ daerom den rechthouck BP $\frac{792}{7}$ ende den rechthouck BS $\frac{704}{7}$ ende den rechthouck EQ $\frac{88}{7}$.



Thewijs. Anghesien den rechthouck BS doet $\frac{704}{7}$ ende den rechthouck EQ $\frac{88}{7}$ makende tsamen $\frac{792}{7}$, soo sijn die twee

rechthoucken even aenden rechthouck BP, oock doende $\frac{792}{7}$, maer den rechthouck BP is even aen tront BCD deur tvoornombde voorstel van Archimedes, daerom beyde de rechthoucken BS ende EQ sijn tsamen even aen tgheheel ront BCD maer den rechthouck EQ is even aen tront EF deur tvoorsz. voorstel van Archimedes, daerom getrocken tcleen ront EF van tgheheel ront BCD soo blijft den rechthouck BS even aen het plat begrepen tusschen de twee omtrecken BCD, EF. Twelck soo synde, het volghende vertooch is uyt het voorgaende openbaer.

Vertooch.

Wesende de halfmiddellijn eens ronts vast opt middelpunt de rest draeyende int rondt: De cromme voortganck vant uyterste deel der halfmiddellyn is euen aen een rechte voortganck soo lanck wesende als diens deels middelpunts cromme voortganck.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN Dr. B. HAGEN,

GETITELD:

UEBER KÖRPERGRÖSSE UND WACHSTHUMSVERHÄLTNISSE DER SÜD-CHINESEN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884.)

In de Vergadering dezer Afdeeling van den 23sten Februari l.l. werd aan de ondergeteekenden opgedragen verslag uit te brengen over eene verhandeling van Dr. B. HAGEN, arts te Tandjong Morawa in het gebied van Serdang, Resid. Sumatra's Oostkust, getiteld: *Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen.*

Dr. HAGEN, als arts op eene tabaksplantage te Deli op de Oostkust van Sumatra werkzaam, heeft zich de voor hem bestaande gelegenheid ten nutte gemaakt en door het meten der op de plantage aangebrachte koelies getracht eene leemte in de anthropologische wetenschap aan te vullen. Het door hem gebezigde materiaal bestond uitsluitend uit Zuid-Chineezen in den leeftijd van 20—50 jaren; zij waren afkomstig uit de binnenste streken der provincie Kwang-Tung en behoorden tot de 3 Afdeelingen der Cheü-hu's, der Kee's en der Hei-Lok-Hong's; in zuiverheid van ras overtreffen deze stammen wellicht alle anderen.

Deze koelies worden jaarlijks bij duizenden uit Hongkong en Swatau via Singapore en vooral via Penang naar Deli geïmporteerd. In Penang worden zij dadelijk met het oog

op hunne geschiktheid voor veldarbeid gekeurd en daarbij wordt ook de lichaamsgrootte gemeten. Bij de aankomst op de plantage, waar Dr. HAGEN werkzaam is, werden de koelies ook door hem onderzocht en de te Penang verkregen maten gecontroleerd. Buitendien werden eenige andere honderden koelies door hem gemeten en, ten einde het duizendtal volledig te maken, werden de door SCHERZER en SCHWARZ op de reis der Novara gemetene en uit dezelfde provincie afkomstige Zuid-Chineezen in zijne tabel opgenomen.

Daar het aantal metingen niet groot genoeg kon geacht worden om het gemiddelde der lichaamslengte in elk levensjaar afzonderlijk te bepalen, werd eene reeks van jaren te zamen genomen en werden kategoriën van 5—5 jaren gevormd. Alleen de laatste kategorie (van 40—50 jaren) bevat 10 jaren, omdat het aantal afzonderlijke metingen daarin te gering is.

Uit de door Dr. HAGEN medegedeelde cijfers blijkt dat de Zuid-Chineezen tot aan de 3de kategorie (van 30—34 jaren) gestadig groeien en in deze laatste hun maximum (1622 mm.) bereiken. Bij de door Dr. HAGEN onderzochte Chineezen schijnt dus dezelfde wet te gelden, die QUETELET bij de Belgen gevonden en LELUT bij de Franschen bevestigd heeft, dat namelijk het lichaam tot na het 30ste levensjaar in de lengte groeit. Iets dergelijks heeft GOULD bij de Amerikanen gevonden.

Na het 34ste levensjaar wordt de lichaamsgrootte langzaam, doch gestadig geringer. Wordt dit verschijnsel door verdere waarnemingen bevestigd, dan zal het, volgens Dr. HAGEN, wel als seniele teruggang opgevat moeten worden. Doch Dr. HAGEN zelf maant tot voorzichtigheid bij het trekken van besluiten uit de betrekkelijk geringe getallen zijner beide laatste kategoriën.

Uit de door Dr. HAGEN medegedeelde cijfers is verder af te leiden, dat men, om de gemiddelde lichaamsgrootte van een volk te bepalen, strikt genomen slechts de cijfers zou moeten gebruiken, verkregen door metingen van menschen tusschen 30 en 34 jaren. Het verschil tusschen deze

kategorie en de daaraan voorafgaande, bevattende de individu's tusschen 25 en 29 jaren, is evenwel zóó gering, dat deze beide kategoriën zonder nadeel in rekening gebracht kunnen worden.

Na bovenstaande korte mededeeling van den hoofdinhoud van het geschrift van Dr HAGEN, geven wij aan de Afdeeling in overweging, dezen arbeid in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen. Dr. HAGEN, die zich reeds vroeger door zoölogische onderzoekingen op Sumatra en door een reis naar het meer van Toba bekend gemaakt heeft, heeft door de hier besproken onderzoekingen feiten aan het licht gebracht, die uit een anthropologisch oogpunt niet zonder belang geacht kunnen worden, te meer daar het vereischte materiaal uiterst moeielijk te verkrijgen is.

Amsterdam, 29 Maart 1884.

T. ZAAIJER,
W. KOSTER.

ÜBER KÖRPERGRÖSSE

UND

WACHSTHUMSVERHÄLTNISSE DER SÜD-CHINESEN.

VON

Dr. B. HAGEN.

Es mangelt in der anthropologischen Literatur noch gar sehr an grösseren Reihen einheitlicher Körpermessungen. Man würde allerdings denjenigen Reisenden ungenügend ausgerüstet nennen, der nicht mit anthropologischen Messapparaten versehen wäre; es liegt aber in der Natur der Sache, dass ein solcher je nach der Zeit, die er unter einem Volke verweilt, nur einige dutzend oder, wenn es hoch kommt, einige hundert Messungen mit nach Hause bringt. Um mehr leisten zu können, muss er schon jahrelang in einem Gebiet verwielen oder anderweitig in eine günstige Gelegenheit versetzt werden. Aber selbst einige hundert Messungen reichen zur endgültigen, unanfechtbaren Bestimmung des Normal-Mittels eines ganzen Volkes noch nicht aus und geben keine Sicherheit, wie ich mich während meiner Arbeiten oft genug überzeugen konnte. Erst bei 500 bis 1000 Einzelmessungen fangen die fluctuirenden Mittelwerthe an, einigermassen Stabilität zu gewinnen und werden auch durch einige Extreme höchstens noch um Zehntelsmillimeter aus dem Gleichgewicht gebracht.

Ich bin nun zwar nicht in der glücklichen Lage, wie der Americaner Gould, eine runde Million von Einzelmessungen vorlegen zu können, ja nicht einmal 12000 wie der Baier

J. C. Majer; meine Messungen erstrecken sich nur über c.a 1000 Individuen; doch glaube ich aus dem eben angeführten Grunde, dass schon diese Zahl genügend verlässliche Mittelwerthe gibt und mit dazu beitragen hilft, die kleinen unzureichenden und desshalb ganz beweisunkräftigen Zahlenreihen der anthropologischen Handbücher durch grössere, vertrauenerweckendere und mehr Sicherheit gewährende zu ersetzen.

Das Material der vorliegenden Grössenlisten wird ausnahmelos von Süd-Chinesen im Alter von 20—50 Jahren aus den inneren Gegenden der Provinz Kwang-Tung (zu beiden Seiten des n. Wendekreises) gebildet, welche zu den 3 Abtheilungen der Chëu-hu's, der Kee's (wozu ich auch die Macao-leute (Punti's und Hakka's) rechne) und der Hei-Lok-Hong's gehören; wenn irgend ein Volk auf Rassenreinheit Anspruch machen darf, so sind es diese Völker. Die Kuli's, an harte Feldarbeit im Tropenklima gewöhnt, bilden fast das ausschliessliche Arbeitsmaterial für die grossen Tabaksplantagen in Deli auf Sumatra's Ostküste und werden alljährlich zu Tausenden aus den Hafenplätzen Hongkong und Swatau via Singapore oder (am häufigsten) Penang nach Deli importirt. So wie sie in Penang ankommen, werden sie ärztlicherseits auf ihre Tauglichkeit für Feldarbeit untersucht und wird im Zusammenhang damit ihre Körpergrösse gemessen. Bei der Ankunft auf der Pflanzung, auf welcher ich als Arzt fungire, werden die Kuli's von mir nochmals untersucht und dabei die Grössenlisten des Arztes in Penang controlirt, so dass also durch diese doppelten Messungen die wünschenswertheste Exactheit erzielt sein dürfte. Ausser dem aus diesen Listen erhaltenen Material habe ich jedoch noch einige weitere hundert Kuli's in Bezug auf ihre Körpergrösse gemessen, und um die Zahl 1000 voll zu machen, wurden die 26 von Scherzer und Schwarz *) gemessenen Chinesen, die aus der nämlichen Provinz stammen, in meine Tabelle eingerechnet.

---

*) Anthropologischer Theil der Novarareise v. Weisbach S. 11 ff.

Ich glaube nummehr noch einem Einwand begegnen zu müssen, als ob die ärztliche Auswahl der zur Feldarbeit geeigneten Kuli's von Einfluss auf die Grössenziffern sei. Dies ist durchaus nicht der Fall; nur kranke oder schwächlich gebaute Leute werden refüsirt; diese beiden Factoren jedoch haben bekanntlich auf die Körpergrösse nicht den geringsten Einfluss.

Da ich nicht eine hinreicheud grosse Zahl von Messungen aus jedem einzelnen Jahrgang besass, sah ich mich genöthigt, eine Reihe von Jahrgängen zusammen zu ziehen und bildete mir Kategorien von 5 zu 5 Jahren; nur die letzte, fünfte Kategorie umfasst 10 Jahre, da die Einzelmessungen zu spärlich waren. Auf diese Weise erhielt ich als Durchschnittswerth für die:

I.	Kategorie	(20–24 Jahre)	= 1612	m.m.	aus	310	Messungen.
II.	»	(25–29 »)	= 1621,3	»	»	297	»
III.	»	(30–34 »)	= 1622	»	»	225	»
IV.	»	(35–39 »)	= 1620	»	»	124	»
V.	»	(40–50 »)	= 1618	»	»	51	»
						1007	Messungen.

Aus dieser Tabelle ersehen wir nun zunächst, dass der (Süd-)Chinese bis zur III. Kategorie (30—34 J.) stetig wächst und in dieser letzteren sein Maximum erreicht (1622 m.m.). Der Unterschied zwischen der I. und II. Kategorie beträgt beinahe 10 m.m., derjenige zwischen der II. und III. jedoch noch nicht einmal 1 m.m. Daraus folgt, dass das Wachsthum gegen die Höhe der Entwicklung sich bedeutend verlangsamt. Unser Ergebniss stimmt also genau mit dem von Scherzer und Schwarz auf Grund ihrer völlig unzulänglichen (nur 26!) Messungen ausgesprochenen und desshalb nur zufällig das Wahre treffenden Satze überein: »dass also auch bei den Chinesen jenes Gesetz zu gelten scheint, welches Quetelet bei den Belgiern gefunden und Lelut bei den Franzosen bestätigt hat: Dass nämlich der Körper bis in die 30er Jahre in die Länge wächst". Etwas ähnliches hat Gould bei den Americanern gefunden (Peschel,

Völkerkunde, S. 82). Wir sehen nun aber noch ferner, dass in der IV. und V. Kategorie die Körpergrösse langsam, aber stetig wieder zurückgeht, eine Erscheinung, die wir, wenn sie sich bestätigt durch feinere Beobachtungen, wohl als senile Rückbildung aufzufassen haben. Denn ich will nicht vergessen darauf hinzuweisen, dass gerade die beiden letzten Kategorien die zahlenärmsten und desshalb Vorsicht erheischenden sind. Die V. Kategorie namentlich enthält nur 51 Messungen, obwohl ich hier schon zwei fünfjährige Kategorien zu einer 10jährigen verschmolz. Frappirend ist auf den ersten Augenblick der Umstand, dass sich der Altersschwund schon so frühe, Ende der 30er Jahre, bemerklich macht Es ist dies eben eine neue Bestätigung des alten Satzes, dass es in der Natur keinen Stillstand gibt; wo die Entwicklung aufhört, fängt die Rückbildung an.

So hätten wir also im Grossen und Ganzen die Wachsthumsgesetze der Süd-Chinesen zwischen 20 und 50 Jahren fixirt. Hieraus geht nun für den Anthropologen hauptsächlich eine wichtige Folgerung hervor. Bei Bestimmung der allgemeinen Durchschnittsgrösse eines Volkes müssen wir die noch nicht völlig entwickelten, sowie die in seniler Rückbildung begriffenen Individuen, also die Kategorien I, IV und V ausscheiden und nur das Alter zwischen 25 und 35 Jahren berücksichtigen, denn nur so erhalten wir das wahre Mittel des ausgewachsenen Volkes, um das es dem Anthropologen doch hauptsächlich zu thun sein muss. Wollten wir sehr scrupulös sein, so dürften wir eigentlich nur die Kategorie III berücksichtigen und ihr Durchschnitt (1622 m.m.) bildete zugleich auch das Mittel des ausgewachsenen Volkes; doch ist der Unterschied von der Kategorie II nur so gering, dass wir auch diese Individuen schon als ausgewachsen betrachten und zur Berechnung des allgemeinen Mittels heranziehen dürfen.

Es sind die Wachsthumsgesetze des menschlichen Körpers überhaupt und der einzelnen Völker im Besonderen noch viel zu wenig bekannt, als dass wir hier uns eine Vergleichung oder gar Schlüsse zu ziehen erlauben dürften; auch mangelt es mir hiezu augenblicklich in meinem fernen,

abgelegenen Wohnort zu sehr an einschlägiger Literatur; eines aber glaube ich doch mit Bestimmtheit aussprechen zu können: Individuen unter 24 Jahren sind wohl bei allen Völkern noch nicht völlig entwickelt, und Leute über 45 Jahre werden überall mehr weniger schon senile Rückbildung zeigen. Solche Individuen sollte man also a priori bei Berechnung eines Volksdurchschnittes ausschliessen, so lange keine speciellen Wachsthumsverhältnisse bekannt sind.

Das nämliche Resultat, etwas schwankender allerdings, aber in Bezug auf das Wachsthum der einzelnen Jahrgänge genauer, erhalten wir, wenn wir das Material anstatt in fünfjährige Kategorien, in solche von je 2 und 2 Jahren theilen. Wir erhalten dann folgendes Bild:

I.	20—21	Jahre	=	1606,6	m.m.	aus 72	Messungen
II.	22—23	»	=	1612,5	»	» 129	»
III.	24—25	»	=	1616,8	»	» 120	»
IV.	26—27	»	=	1624	»	» 94	»
V.	28—29	»	=	1620,4	»	» 120	»
VI.	30—31	»	=	1623,2	»	» 111	»
VII.	32—33	»	=	1620,6	»	» 76	»
VIII.	34—35	»	=	1621,6	»	» 47	»
IX.	36—37	»	=	1624	»	» 57	»
X.	38—39	»	=	1616,5	»	» 40	»
XI.	40—50	»	=	1618	»	» 51	»

Hier sehen wir besser als bei der vorigen Tabelle das schnelle Wachsthum in der ersten Hälfte der zwanziger Jahre, beinahe 6 m.m. im zweijährigen Durchschnitt, per Jahr also im Grossen und Ganzen zwischen 2—3 m.m. Von 26 bis zu 37 Jahren sehen wir kein Wachsthum mehr; die Zahlen schwanken willkürlich hin und her in einer Grenze von beiläufig $3^1/_2$ m.m., zwischen 1620,4 und 1624 m.m., Ziffern, die weder vorher noch nachher erreicht werden. Dadurch hebt sich diese Gruppe von selbst als die Gruppe der ausgewachsenen Individuen hervor, und als Entwicklungsgrenze haben wir etwas genauer als aus den fünfjährigen Kategorien das 37 Jahr erhalten. Von hier an fällt die Grössenziffer merklich.

Es bleiben uns nunmehr noch einige Worte über die gefundenen Extreme zu sagen, d. h. über die Grenzen, zwischen welchen sich die gemessenen Körpergrössen bewegten.

Der kleinste Mann misst 1225 m.m. und steht mit solch niedriger Ziffer ganz allein da; er ist somit als einzige zwergenhafte Ausnahme zu bezeichnen, da die nächstniedrige Ziffer fast um 200 m.m. höher ist, nämlich 1410 m.m. Im Gegensatze hiezu erreicht kein einziger Mann die Höhe von 1800 m.m.; die höchste Ziffer ist 1795 m.m. Die beste Uebersicht wird folgende Tabelle geben:

Unter	1300	m.m.	misst	1	Individuum	
»	1400	»	»	0	»	
»	1500	»	messen	14	Individuen	(Extrem 1410)
Zwischen	1500—1600	»	»	306	»	
»	1600—1700	»	»	517	»	
Ueber	1700	»	»	79	»	(Extrem 1795)

Das Mittel des ausgewachsenen Volkes beträgt, wie früher schon erwähnt, in runder Zahl 1622 m.m.; die Süd-Chinesen gehören somit zu den mittelgrossen Völkern.

Wenn nan die Extreme nach oben und unten (unter 1500 und über 1700 m.m.) nach Procenten ausrechnet, so entfallen auf die Jahrgänge:

	Unter 1500 mM.	Extrem	Ueber 1700 mM.	Extrem
20—21 (72 Messungen)	1,4 pCt.	1470	5,5 pCt.	1735
22—23 (129 ")	1,5 "	1455	10,0 "	1755
24—25 (120 ")	2,5 "	1455	4,1 "	1753
26—27 (94 ")	2,1 "	1470	7,4 "	1795
28—29 (120 ")	0,8 "	1225	12,5 "	1762
30—31 (111 ")	0,9 "	1490	10,0 "	1740
32—33 (76 ")	—	—	10,5 "	1752
34—35 (47 ")	2,1 "	1495	4,2 "	1725
36—37 (57 ")	1,7 "	1490	5,2 "	1735
38—39 (40 ")	5,0 "	1470	7,5 "	1735
40—50 (51 ")	2,0 "	1410	10,0 "	1740
Total 917 *) Messungen	1,7 pCt.	1225	8,3 pCt.	1795

*) Von 90 Kuli's war das Alters- (Geburts-) Jahr nicht zu eruiren, dieselben konnten desshalb für diese Tabelle nicht verwendet werden.

MESSUNGSLISTE.

Es ist wohl nicht ganz überflüssig darauf hinzuweisen, dass der Chinese sein Alter in so fern etwas anders berechnet als wir Europäer, als er sein Geburtsjahr für voll rechnet, gleichviel in welchem Monat er geboren wurde; ein Kind z. B. das am 31 Dezember geboren wird, ist am nächsten Fage, am 1 Januar, schon 1 Jahr alt.

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse. in mm.	Alter.
1510	20 J.	1545	21 J.	1513	22 J.	1610	22 J.
1535		1550		1520		1610	
1545		1550		1520		1613	
1545		1555		1535		1613	
1550		1557		1543		1615	
1553		1570		1547		1620	
1560		1570		1550		1620	
1570		1575		1555		1620	
1570		1577		1557		1625	
1580		1580		1560		1630	
1580		1580		1560		1630	
1583		1590		1565		1630	
1589		1595		1567		1630	
1590		1600		1567		1632	
1590		1605		1570		1635	
1590		1605		1570		1635	
1590		1615		1570		1640	
1600		1615		1570		1650	
1600		1623		1570		1653	
1600		1630		1570		1653	
1605		1635		1580		1655	
1610		1645		1580		1655	
1610		1650		1580		1660	
1615		1650		1580		1660	
1620		1670		1580		1665	
1620		1670		1580		1670	
1620		1670		1585		1675	
1620		1680		1590		1690	
1620		1690		1590		1695	
1627		1690		1590		1705	
1630		1695		1590		1710	
1630		1710		1592		1712	
1650		1710		1595		1712	
1650		1735		1595		1715	
1655				1600		1755	
1710		1455	22 J.	1600			
		1470		1603		1530	23 J.
1470	21 J.	1500		1605		1535	
1500		1505		1605		1535	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse. in mm.	Alter.
1542	23 J.	1572	24 J.	1545	25 J.	1680	25 J.
1550		1572		1550		1680	
1560		1573		1560		1685	
1560		1575		1560		1685	
1560		1575		1565		1690	
1560		1580		1570		1690	
1560		1580		1575		1700	
1560		1585		1580		1720	
1562		1585		1580			
1570		1590		1590		1470	26 J.
1570		1590		1590		1497	
1570		1590		1600		1510	
1580		1597		1605		1545	
1582		1600		16 5		1550	
1582		1600		1607		1557	
1590		1602		1607		1560	
1595		1605		1610		1560	
1610		1610		1610		1567	
1615		1610		1615		1575	
1620		1615		1615		1575	
1620		1615		1615		1580	
1630		1620		1618		1585	
1630		1620		1620		1590	
1640		1620		1620		1590	
1640		1620		1620		1600	
1640		1625		1620		1603	
1640		1630		1620		1610	
1645		1635		1620		1610	
1650		1640		1620		1620	
1650		1640		1620		1625	
1655		1640		1623		1628	
1658		1643		1625		1630	
1658		1645		1625		1630	
1670		1655		1625		1630	
1670		1660		1630		1630	
1670		1660		1630		1635	
1675		1660		1630		1635	
1680		1670		1635		1640	
1680		1670		1635		1650	
1690		1673		1640		1650	
1690		1685		1640		1650	
1705		1690		1644		1650	
1705		1695		1644		1652	
1710		1700		1645		1655	
1710		1703		1645		1655	
1715		1753		1650		1667	
1725				1650		1670	
1745		1480	25 J.	1650		1675	
		1490		1650		1677	
1455	24 J.	1515		1660		1685	
1517		1520		1660		1685	
1540		1520		1670		1690	
1545		1545		1670		1700	
1557		1545		1675		1790	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grössé in mm.	Alter.
1795	26 J.	1545	28 J.	1633	28 J.	1657	29 J.
		1545		1635		1665	
1547	27 J.	1547		1635		1665	
1550		1550		1638		1685	
1560		1550		1640		1700	
1565		1550		1640		1705	
1565		1550		1647		1710	
1570		1552		1650		1720	
1570		1555		1650		1725	
1570		1557		1650		1727	
1575		1557		1650			
1580		1560		1650		1490	30 J.
1585		1560		1655		1510	
1590		1560		1660		1520	
1595		1560		1660		1540	
1600		1565		1665		1547	
1600		1570		1667		1550	
1608		1570		1670		1555	
1610		1575		1670		1555	
1610		1580		1675		1560	
1615		1585		1680		1560	
1616		1585		1685		1565	
1616		1585		1690		1570	
1617		1590		1693		1570	
1617		1590		1700		1570	
1620		1590		1700		1570	
1620		1590		1715		1575	
1622		1595		1730		1575	
1622		1595		1750		1575	
1625		1595		1750		1575	
1630		1600		1750		1577	
1630		1600		1760		1580	
1640		1600		1762		1580	
1640		1605				1580	
1645		1610		1225	29 J.	1585	
1650		1610		1550		1585	
1650		1610		1557		1590	
1650		1610		1560		1590	
1653		1610		1565		1590	
1657		1610		1570		1595	
1659		1615		1580		1595	
1670		1615		1590		1600	
1673		1615		1595		1600	
1673		1617		1607		1600	
1680		1620		1620		1600	
1680		1620		1620		1610	
1700		1620		1620		1615	
1720		1620		1625		1620	
1744		1620		1625		1620	
1750		1625		1630		1620	
		1625		1630		1620	
1500	28 J.	1630		1632		1620	
1535		1630		1635		1620	
1540		1630		1650		1625	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.
1627	30 J.	1657	31 J.	1685	32 J.	1665	34 J.
1630		1660		1685		1670	
1630		1660		1690		1675	
1635		1665		1710		1685	
1635		1665		1715		1690	
1640		1670		1720		1705	
1640		1670		1740			
1646		1670				1495	35 J.
1650		1675		1520	33 J.	1550	
1650		1680		1545		1560	
1655		1685		1563		1565	
1660		1690		1570		1585	
1660		1700		1570		1585	
1662		1700		1575		1595	
1665		1740		1595		1600	
1670				1595		1600	
1670		1500	32 J.	1597		1600	
1670		1515		1598		1610	
1675		1530		1598		1610	
1680		1550		1600		1610	
1680		1550		1600		1620	
1680		1555		1610		1625	
1690		1555		1610		1630	
1690		1567		1615		1635	
1700		1567		1617		1635	
1700		1572		1620		1640	
1710		1575		1630		1645	
1720		1585		1630		1650	
1720		1585		1635		1650	
1720		1590		1660		1685	
1724		1590		1670		1685	
1730		1600		1670		1687	
1730		1600		1670		1695	
		1602		1685		1725	
1504	31 J.	1603		1695			
1512		1605		1700		1540	36 J.
1524		1607		1710		1540	
1524		1607		1720		1545	
1550		1610		1752		1554	
1563		1610				1554	
1580		1610		1550	34 J.	1557	
1590		1610		1550		1560	
1600		1622		1550		1570	
1600		1630		1565		1570	
1605		1635		1580		1577	
1607		1635		1585		1580	
1620		1638		1590		1590	
1620		1640		1600		1600	
1625		1645		1600		1605	
1625		1650		1610		1620	
1626		1655		1610		1630	
1636		1655		1647		1630	
1640		1670		1655		1630	
1656		1675		1660		1635	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.
1645	36 J.	1677	37 J.	1695	38 J.	1570	42 J.
1650		1680		1695		1585	
1650		1700		1720		1590	
1650		1730		1726		1603	
1650				1735		1630	
1652		1470	38 J.			1660	
1655		1480		1550	39 J.	1665	
1655		1507		1600		1725	
1680		1525		1630			
1680		1557		1687		1614	43 J.
1685		1566		1700		1650	
1690		1566					
1735		1567		1537	40 J.	1555	44 J.
		1567		1575		1600	
1490	37 J.	1575		1590		1670	
1552		1585		1605		1695	
1564		1595		1610			
1564		1595		1610		1555	40-45 J.
1570		1602		1610		1615	
1603		1605		1615		1617	
1605		1615		1620		1625	
1605		1615		1625		1660	
1608		1615		1625		1670	
1630		1620		1635		1720	
1635		1620		1640			
1637		1625		1680		1410	45 J.
1640		1630		1700		1557	
1640		1630		1705		1570	
1640		1630		1740		1617	47 J.
1640		1640				1675	
1650		1643		1650	41 J.	1700	48 J.
1655		1645				1520	49 J.
1655		1650		1545	42 J.	1540	50 J.
1660		1655		1555		1617	
1660		1667		1565			

OVER DE BANEN

BESCHREVEN ONDER

DEN INVLOED EENER CENTRALE KRACHT.

DOOR

D. J. KORTEWEG.

I. Inleiding.

1. Wanneer wij *a priori* willen nagaan, welke verschillende vormen de banen zullen kunnen aannemen, die ontstaan onder de werking eener centrale kracht, welke eene ondubbelzinnige functie is van den afstand tot het centrum, dan kan dit geschieden door eene denkbeeldige baan eerst te vervolgen in middelpuntvliedende richting en daarna in middelpuntzoekende richting en daarbij te letten op de mogelijkheden, die zich kunnen voordoen. Het is dan onmiddellijk duidelijk, dat *de middelpuntvliedende tak* op drie wijzen eindigen kan. Hij kan *ten eerste* tot een apocentrum voeren. De lijn, die van het centrum naar het apocentrum gaat, wordt dan eene as van symmetrie van de baan, zoodat ieder onderzoek naar het verder verloop der baan overbodig wordt. Hij kan *ten tweede* tot op oneindigen afstand van het centrum voeren. *Ten derde* kan de afstand tot het centrum tot eene limietwaarde naderen, die nimmer wordt bereikt. De baan gaat dan onbepaald voort zich spiraalsgewijze rond te bewegen, daarbij dichter en dichter naderende tot een aan haar buitenzijde gelegen asymptotischen cirkel, zonder dien cirkel ooit te bereiken. Wij zullen dezen laatsten baanvorm aanwijzen door

te zeggen, dat de baan een cirkelspiraaleinde bezit met asymptotischen buitencirkel.

De *middelpuntzoekende takken* gedragen zich evenzeer op drieërlei verschillende wijze. Men heeft er *ten eerste* die tot in het centrum voeren. Hoe zij zich dan verder voortzetten zal geen punt van beschouwing voor ons uitmaken. *Ten tweede* die tot een pericentrum aanleiding geven, *ten derde* die eindigen in een cirkelspiraaleinde met asymptotischen binnencirkel.

Combineert men de verschillende wijzen, waarop de baan in middelpuntvliedende en in middelpuntzoekende richting eindigen kan, dan blijkt het dus dat er *negen* verschillende hoofdvormen optreden kunnen, waarnevens dan nog te onderscheiden vallen de cirkelbanen en de radiale banen, die bij iedere krachtenwet mogelijk zijn.

2. Beschouwt men nu de banen, die onder de werking der meest bekende centrale krachten, de kracht evenredig met de eerste macht van den afstand en die omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand, ontstaan dan moet het dadelijk opvallen, dat van de negen mogelijke hoofdvormen er in het eene geval slechts één, in het andere slechts twee voorkomen. Bovendien is in het tweede geval opmerkelijk de eenvoudigheid van het kenmerk, waardoor voor een gegeven punt van vertrek en bij een gegeven snelheid beslist kan worden, welke der beide hoofdvormen zich vertoonen zal. De richting der snelheid is namelijk onverschillig, het is slechts de vraag of de snelheid groot genoeg is om aan het punt zooveel levende kracht te geven als voldoende is om den arbeid te leveren, noodig om het punt in het oneindige te voeren. Dit eenvoudige kenmerk blijft bij vele krachtenwetten doorgaan, maar faalt weer bij anderen. Wat zijn de voorwaarden, waaronder het doorgaat? Binnen welke grenzen geldt de zoo merkwaardige eigenschap van vele krachtenwetten, dat alleen de banen, die recht op het centrum afgezonden worden, dit centrum bereiken, terwijl alle overigen tot een pericentrum voeren? Wat zijn in 't algemeen de voorwaarden waaronder de verschillende hoofdvormen ontstaan? In de literatuur over centrale beweging vindt men voor vele bijzondere onderstellingen om-

trent de krachtenwet de banen berekend en aangegeven. Vooral sedert de invoering der elliptische functiën is het aantal gevallen dat de differentaalvergelijkingen, waartoe men geraakt, integreerbaar zijn, zeer toegenomen. Een direkt en algemeen antwoord op de gestelde vragen, vond ik echter niet, en zoo geraakte ik er toe een zelfstandig onderzoek in te stellen, dat mij voerde tot de ontdekking van eenige algemeene eigenschappen der centrale beweging, die mij waardig schenen te worden medegedeeld.

3. Spoedig bleek de wenschelijkheid het veld, waarin de centrale kracht werkt, en dat, daar alle banen vlakke krommen zijn, als een plat vlak gedacht kan worden, in drieërlei soort van gebied in te deelen. Tot de *eerste soort* behoort elk gebied, waar de centrale kracht afstootend werkt. Tot de *tweede soort* elk gebied, waar zij aantrekt en waar tevens *het produkt van de kracht met de derde macht van den afstand* tot het centrum *met dien afstand aangroeit*. Tot de *derde soort* elk gebied, waar de kracht eene aantrekkende is, terwijl het bedoelde produkt *afneemt*, als de afstand *toeneemt*.

Een gebied van *de eerste soort* noemen wij een afstootingsgebied, een van *de tweede soort* een *stabiliteits-* van de *derde* een *instabiliteitsgebied*, welke laatste twee benamingen ontleend zijn aan de verschillende uitwerking, welke eene kleine storing op de beweging in den cirkelbaan heeft, naar gelang zich die cirkelbaan in een gebied van de *tweede* of van de *derde* soort bevindt.

Natuurlijk kunnen als zeer bijzondere gevallen nog voorkomen: een gebied waar alle krachtwerking ontbreekt, en een gebied — het *omgekeerde derdemachtsgebied*, waar het produkt van de kracht met de derde macht van den afstand constant blijft.

Een willekeurig gegeven krachtenveld kan door cirkels met het centrum van krachtwerking tot middelpunt in deze verschillende soorten van gebied worden ingedeeld.

4. Twee grootheden zijn er die langs eene zelfde baan overal dezelfde waarde bezitten. De eene heeft betrekking op de energie. Meten wij de *potentieele energie* door het arbeidsvermogen, dat vrijkomt als wij het deeltje van de

plaats waar het is, brengen op een eens vooral gegeven afstand van het middelpunt, de *actueele energie* door de halve levende kracht, dan is de som dier beide grootheden, de *totale energie*, voor iedere gegevene baan eene constante.

De andere standvastige grootheid is de in de eenheid van tijd beschreven sector. Die grootheid zullen wij — in overeenstemming met de uitdrukking: hoeksnelheid — den naam van *sectorsnelheid* geven.

Beide deze constanten en één harer punten bepalen, als de krachtenwet bekend is, de baan en de snelheid in de baan. Immers uit de *totale energie* kan men de grootte, en daarna uit de *sectorsnelheid* de richting der snelheid in het gegeven punt berekenen, daaruit de plaats van een volgend punt afleiden en zoo voortgaande de gansche baan construeeren.

Kiest men dan vervolgens een ander uitgangspunt, terwijl men de *totale energie* en de *sectorsnelheid* onveranderd laat, dan zal men eene baan van dezelfde gedaante, die met dezelfde snelheid doorloopen wordt, terugvinden, *mits* de voerstraal van het uitgangspunt gelijk is aan den voerstraal van een der punten, die tot de vroegere baan behoorden. Neemt men daarentegen een uitgangspunt, welks voerstraal grooter is dan de grootste, of kleiner dan de kleinste waarde van de voerstralen, die in de vroegere baan voorkwamen, dan kan het gebeuren, dat ook door dit uitgangspunt eene baan gaat, die dan echter eene andere gedaante bezit. Bij gegeven *totale energie* en *sectorsnelheid* zijn in het algemeen meerdere banen van verschillende gedaante mogelijk, maar geen twee dezer banen kunnen een voerstraal van gelijke grootte bezitten, zoodat de kennis van een der voerstralen, die in de baan voorkomen, deze geheel ondubbelzinnig bepaalt.

Het behoeft wel niet gezegd te worden, dat al deze banen dan uit een zuiver wiskundig oogpunt bij elkander behooren en, indien uitvoering der integraties der bewegingsvergelijkingen mogelijk is, te zamen in dezelfde analytische vergelijking zullen begrepen zijn. Het is echter onmogelijk dat een materieel deeltje van de eene op de andere over-

gaat, en in zooverre zijn het uit een mechanisch oogpunt verschillende banen.

Daar wij in het vervolg de banen uitsluitend uit dit laatste oogpunt beschouwen, voeg ik hier eene opmerking toe, die om die reden moeilijk elders plaats vinden kan. Zij betreft eene omstandigheid die aanvankelijk mij eenige verwondering veroorzaakte. Wanneer men uit één zelfde punt met eene zelfde beginsnelheid banen in verschillende richting vertrekken laat, dan zal, zooals later blijkt, een oneindig klein verschil in richting, dikwijls een eindig verschil in apocentrum-afstand veroorzaken. Dit zal steeds gebeuren als bij eene bepaalde richting der snelheid eene baan met cirkelspiraaleinde ontstaat.

Hoe moet dit uit een wiskundig oogpunt verklaard worden? Op volgende wijze: Bij eene bepaalde richting der snelheid bestaan er twee banen, waarin de sectorsnelheid en totale energie dezelfde waarde bezitten, en die dus wiskundig bijeen behooren. De buitenste van deze omhult de andere, zoodat *haar* pericentrum verder van het centrum verwijderd ligt als het apocentrum der binnenste baan. Terwijl men nu de richting of ook de grootte der snelheid in het gegeven punt geleidelijk in bepaalden zin verandert, worden apocentrum-afstand der binnenste en pericentrum-afstand der buitenste baan meer en meer gelijk. Op het oogenblik dat deze geheel gelijk worden, eindigen beide banen in cirkelspiraaleinden, die een zelfden cirkel, de een tot asymptotischen binnen- de ander tot asymptotischen buitencirkel bezitten.

Het volgend oogenblik zijn de banen samengesmolten en ook uit een mechanisch oogpunt te beschouwen als één enkele baan. Het materieele deeltje, dat de baan afloopt, bereikt dan plotseling een apocentrum-afstand, overeenkomende met dien van de buitenste baan.

5. Door ieder punt kan ééne cirkelbaan worden gevoerd; om deze te doen beschrijven moet aan het materieele deeltje eene bepaalde snelheid gegeven worden, die wij de plaatselijke *cirkelsnelheid* in dat punt zullen noemen; de waarde welke de energie dan verkrijgt noemen wij de *energie der*

cirkelbeweging daar ter plaatse; evenzoo kan men spreken van de *sectorsnelheid der cirkelbeweging* in een gegeven punt.

In het vervolg onderstellen wij, dat de massa van het materieele deeltje gelijk is aan de eenheid van massa, wat natuurlijk geene beperking is. Voorts voeren wij de volgende notaties in:

ϱ_0 afstand van het centrum tot het punt, waar de potentieele energie gelijk *nul* gesteld is,
ϱ afstand van een willekeurig punt tot het centrum,
v snelheid in eenig punt der baan,
μ scherpe hoek tusschen raaklijn en voerstraal,
F aantrekkende kracht,
A totale energie eener willekeurige baan,
A_w energie der cirkelbeweging in eenig punt,
B sectorsnelheid eener willekeurige baan,
B_w sectorsnelheid der cirkelbeweging in eenig punt.

Naar gelang de hoek μ kleiner is, zullen wij de baan steiler noemen.

Tusschen deze grootheden bestaan als bekend is, de volgende betrekkingen:

$$w^2 = F\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$A_w = \tfrac{1}{2} w^2 + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho = \tfrac{1}{2} F\varrho + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho \quad \ldots \quad (3)$$

$$B = \tfrac{1}{2} \varrho v \sin \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$B_w = \tfrac{1}{2} \varrho w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Verder willen wij nog even aanvoeren de voorwaarde waaronder een *pericentrum* of een *apocentrum* in de baan optreedt. Voor beiden wordt vereischt:

$$\mu = 90^0$$

maar bovendien verlangt een *pericentrum*

$$v > w \qquad \text{en dus} \qquad A > A_w$$

een *apocentrum* daarentegen:

$$v < w \qquad \text{en dus} \qquad A < A_w$$

Een *cirkelspiraaleinde* eischt natuurlijk, dewijl de baan in gedaante meer en meer tot de cirkelbaan nadert:

$$lim.\ v = lim.\ w \qquad A = lim\ A_w \quad .$$

Eindelijk wijzen wij op eene stelling, waarvan wij in het vervolg meermalen stilzwijgend gebruik maken zullen, deze namelijk: dat wanneer van een zelfde punt met dezelfde snelheid, maar in verschillende richtingen banen vertrekken, in alle punten dezer banen welker voerstralen overeenstemmen dezelfde snelheden gevonden worden. Immers de energie is in al deze banen dezelfde. Op gelijke afstanden van het centrum is voorts de potentieele, dus ook de actueele energie, dus ook de snelheid in alle banen gelijk.

II. Algemeene stellingen.

6. Stelling I. *De energie der cirkelbeweging, de sectorsnelheid der cirkelbeweging en de grootheid $F.\varrho^3$ in eenig punt nemen steeds gelijktijdig toe en af bij verplaatsing van dit punt door het veld.*

Bewijs. Alle drie deze grootheden zijn uitsluitend functiën van ϱ. Men heeft:

$$\frac{d.\,A_w}{d\,\varrho} = \tfrac{3}{2}\,F + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d\,F}{d\varrho} = \frac{1}{2\,\varrho^2}\cdot\frac{d.\,F.\,\varrho^3}{d\,\varrho} \quad . \; . \; . \; (6)$$

waaruit blijkt, dat de differentiaal-quotienten van A_w en van $F\varrho^3$ naar ϱ steeds hetzelfde teeken hebben.

Verder is:

$$B^2{}_w = \tfrac{1}{4}\,\varrho.^2\,w^2 = \tfrac{1}{4}\,F.\,\varrho^3\,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

waarmede de stelling volledig bewezen is.

Gevolgen a. In een *stabiliteitsgebied* neemt de *energie* en de *sectorsnelheid* der cirkelbeweging met den afstand *toe*, in een *instabiliteitsgebied af.*

b. In een *omgekeerde derdemachtsgebied* zijn de *energie* en *sectorsnelheid* der cirkelbeweging overal gelijk.

c. Op de grens tusschen een *stabiliteits-* en *instabiliteitsgebied* verkrijgen de *energie* en de *sectorsnelheid* der cirkelbeweging maximum- of minimumwaarden. Maximumwaarden als het *instabiliteits-* minimumwaarden als het *stabiliteitsgebied* buitenwaarts ligt.

d. Het apocentrum en het pericentrum eener zelfde baan kunnen nooit binnen éénzelfde instabiliteitsgebied gelegen zijn. Noem namelijk ϱ_2 de voerstraal van het apo- ϱ_1 van het pericentrum, dan is noodzakelijk $w^2{}_2 > v^2{}_2$; dus $A_{w_2} > A$; daarentegen $A_{w_1} < A$; dus $A_{w_2} > A_{w_1}$. Dit nu is ten duidelijkste in strijd met de bewezene stelling, want daar $\varrho_2 > \varrho_1$ zou men moeten hebben in een instabiliteitsgebied: $A_{w_2} < A_{w_1}$.

e. Daaruit volgt nu weer onmiddellijk dat *indien het geheele veld bestaat uit één enkel instabiliteitsgebied, zooals bijv. het geval is voor iedere krachtenwet* $F = \frac{f}{\varrho^n}$, *alwaar* $n > 3$, *in éénzelfde baan nimmer een pericentrum en een apocentrum beiden aanwezig kunnen zijn.* Alle banen moeten dus in zulk een veld òf uit het oneindige tot een pericentrum (of spiraaleinde met asymptotischen binnencirkel) òf van uit het centrum naar een apocentrum (of spiraaleinde met asymptotischen buitencirkel) òf eindelijk van uit het oneindige naar het centrum voeren.

f. Verder valt uit *gevolg d* af te leiden, *dat eene cirkelbaan in een instabiliteitsgebied in dien zin eene instabiele bewegingstoestand vertegenwoordigt*, dat eene kleine verstoring ten gevolge heeft, dat het bewegende deeltje zich ten slotte op aanzienlijken afstand van de oorspronkelijke cirkelbaan verwijderen zal. Immers moet na de verstoring òf het pericentrum òf het apocentrum buiten het instabiliteitsgebied gelegen zijn.

g. Iedere baan die vertrekt van uit eenig punt van een

instabiliteitsgebied in middelpuntvliedende richting met eene snelheid grooter dan of gelijk aan de plaatselijke cirkelsnelheid moet noodzakelijk dit gebied aan den buitenkant verlaten, of, indien het zich tot in het oneindige uitstrekt, een tot in het oneindige voortloopende tak bezitten. Dit gevolg geldt ook voor het omgekeerde derdemachtsgebied.

Immers een apocentrum is onmogelijk, wijl de totale energie der baan gelijk is aan of overtreft die der plaatselijke cirkelbaan en dit het geval moet blijven voor al de cirkelbanen, die aan de buitenzijde van deze gelegen zijn. Een cirkelspiraaleinde is evenzeer onmogelijk, want dan verschilt de baan ten slotte oneindig weinig van de asymptotische cirkelbaan, en beider energie moet dus overeenkomen. Dit kan niet gebeuren, daar de energie der baan die van alle buitenwaartsche cirkelbanen overtreft. Dat eene baan, wier energie overeenstemt met de gelijke energie van alle cirkelbanen in een omgekeerde derdemachtsgebied niet tot een cirkelspiraaleinde voert, zal later blijken, als wij den vorm dier baan bepalen.

h. Iedere baan die vertrekt van uit eenig punt van een instabiliteitsgebied in middelpuntzoekende richting met eene snelheid kleiner dan, of gelijk aan de plaatselijke cirkelsnelheid, moet noodzakelijk dit gebied verlaten of, indien het tot aan het centrum voert, dit bereiken. Dit gevolg geldt ook voor het omgekeerde derdemachtsgebied.

7. STELLING II. *Het produkt van voerstraal en snelheid* ($v\,\varrho$) *is langs eene zelfde baan toenemende met den afstand tot het centrum zoolang de snelheid van het deeltje de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft, afnemende in het tegenovergestelde geval.*

Maxima en minima van dit produkt komen, behalve in de apocentra en pericentra, slechts in zulke punten voor, waar de snelheid der beweging gelijk is aan de cirkelsnelheid.

Ligt een zoodanig punt in een STABILITEITSGEBIED, *dan is het produkt een* MAXIMUM, *in een* INSTABILITEITSGEBIED *dan een* MINIMUM.

Een afstootingsgebied mag daarbij beschouwd worden, als een gebied waar de snelheid der beweging voortdurend de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft.

Bewijs. Men heeft, dewijl A langs de geheele baan standvastig blijft:

$$d.\, v^2 \varrho^2 = d.\, (2\, A\, \varrho^2 - 2\, \varrho^2 \int_{\rho_0}^{\rho} F.\, d\varrho) =$$

$$=(4A\varrho \cdot 4\varrho \int_{\rho_0}^{\rho} F.d\varrho \;\; 2F.\varrho^2)d\varrho = 4\varrho(A - A_w)d\varrho = 2\varrho(v^2 - w^2)d\varrho. \quad (8)$$

waaruit het eerste gedeelte der stelling volgt.

Voorts zal $v^2 \varrho^2$ en dus ook $v\, \varrho$ nergens anders eene minimum- of maximumwaarde verkrijgen kunnen dan:

1e. daar waar $d\varrho = 0$ dus in *pericentrum* en *apocentrum*. In beide deze punten is $v\, \varrho$ een minimum, zooals gemakkelijk blijkt, indien men bedenkt dat in een *pericentrum* noodzakelijk $v^2 > w^2$ en dus $v^2\, \varrho^2$ in de onmiddellijke nabijheid met toenemenden afstand toenemen moet; terwijl in een *apocentrum* omgekeerd $v^2 < w^2$ en dus in de punten met kleineren voerstraal $v^2\, \varrho^2$ grooter dan in het *apocentrum* moet zijn.

2e. daar waar: $w = v$. Ligt zulk een punt in een stabiliteitsgebied, dan is A_w toenemende met ϱ. Volgen wij dus de baan in middelpuntvliedende richting, dan wordt $A < A_w$ en, daar tevens ϱ toeneemt, zoo neemt $v^2\, \varrho^2$ af. In middelpuntzoekende richting wordt $A > A_w$, maar dan neemt ook in die richting, wijl daarin ϱ afneemt, $v^2\, \varrho^2$ af. Men heeft dus te doen met een maximum. Ligt het punt daarentegen in een instabiliteitsgebied, dan blijkt op dezelfde wijze $v^2\, \varrho^2$ een minimum te zijn.

Ten einde de waardeveranderingen van $v\, \varrho$ in een afstootingsgebied na te gaan, schrijven wij:

$$d.\, v^2\varrho^2 = (4A\varrho - 4\varrho \int_{\rho_0}^{\rho} F.d\varrho - 2F.\varrho^2)d\varrho = (2\, v^2 - 2F\varrho)d\varrho\,. \quad (9)$$

dewijl nu F negatief is, zal $v\, \varrho$ in het afstootingsgebied altijd moeten *toenemen* met ϱ.

Opmerking. Stilzwijgend hebben wij aangenomen, dat F en dan ook w^2 niet sprongsgewijze verandert. Waar dit het geval is, is een afzonderlijk onderzoek noodig. Veran-

dert namelijk w^2 dan van een waarde $< v^2$ tot een waarde $> v^2$ dan is natuurlijk ook dáár een maximum of minimum van $v\varrho$ aanwezig.

Gevolgen. *a.* In ieder *stabiliteitsgebied* kan slechts één *maximum*, in ieder *instabiliteitsgebied* slechts één *minimum* van $v\varrho$ gelegen zijn, met uitzondering altijd van pericentrum en apocentrum. Uit de onafgebroken aangroeijing of afneming van A_w van den binnen- naar den buitenkant van éénzelfde gebied, volgt namelijk onmiddellijk, dat op zulk een gebied slechts eenmaal $v = w$ of $A = A_w$ zijn kan.

b. Ook dáaruit kan men afleiden, dat in éénzelfde instabiliteitsgebied niet te gelijkertijd een pericentrum en apocentrum gelegen kan zijn van dezelfde baan. Immers in *peri-* en *apocentrum* wordt $v\varrho$ minimaal, daartusschen zou dan een maximum van $v\varrho$ moeten liggen, maar in een instabiliteitsgebied is dit onmogelijk.

Zie verder de gevolgen van stelling III.

8. STELLING III. *De scherpe hoek μ tusschen raaklijn en voerstraal is langs eene zelfde baan afnemende met den afstand tot het centrum, zoolang de snelheid van het deeltje de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft, toenemende in het tegenovergestelde geval.*

MAXIMA *en* MINIMA *van* μ, *punten dus van minimale of maximale steilte, kunnen, behalve de maxima in apo- en pericentrum, slechts daar voorkomen, waar de snelheid der beweging gelijk is aan de plaatselijke cirkelsnelheid.*

Ligt zoodanig punt in een STABILITEITSGEBIED *dan is μ een* MINIMUM: *in een* INSTABILITEITSGEBIED *dan een* MAXIMUM.

Een afstootingsgebied mag daarbij weer beschouwd worden als een gebied waar de snelheid der beweging voortdurend de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft.

Bewijs. Dewijl langs dezelfde baan $\frac{1}{2} v\varrho \sin\mu = B$ eene constante is, moet $\sin\mu$ en dus ook μ toenemen als $v\varrho$ afneemt en omgekeerd. Uit deze overweging volgen, in verband met *stelling II*, al de in *stelling III* opgesomde eigenschappen van den hoek μ.

Gevolgen. *a.* In ieder *stabiliteitsgebied* kan slechts één

minimum, in ieder *instabiliteitsgebied* slechts één *maximum* van μ gelegen zijn.

b. Laat men uit éénzelfde punt verschillende banen met dezelfde beginsnelheid vertrekken, dan liggen de punten van maximale en minimale steilte voor al deze banen op dezelfde om het centrum als middelpunt beschreven cirkels.

Immers dewijl de grootheid A voor alle deze banen dezelfde waarde bezit, moeten voor gelijke voerstralen de snelheden overeenstemmen, het produkt $v\varrho$ en dus ook de hoek μ moet derhalve dezelfde maximale of minimale waarden in al deze banen voor gelijke waarden der voerstraal bereiken. Passen wij deze gevolgtrekking toe op de *aantrekking volgens de omgekeerde tweedemacht van den afstand*, dan voert zij onmiddellijk tot eenige van elders bekende fraaie theorema's. Bij de elliptische banen toch onder de werking dezer wet beschreven, verkrijgt μ zijne minimale waarden in de uiteinden der kleine as; daaruit volgt dan vooreerst:

De uiteinden der kleine assen van de elliptische banen, die van eenzelfde punt met dezelfde snelheid uitgaan, liggen allen op éénzelfden cirkel om het attractiecentrum beschreven.

Bedenkt men nu bovendien, dat de afstand tusschen het brandpunt en de uiteinden der kleine as gelijk is aan de groote as, zoo blijkt onmiddellijk:

Al deze ellipsen bezitten gelijke groote assen, en dus ook blijkens de derde wet van Kepler gelijke omloopstijden.

Let men er nu op, dat de sectorsnelheid $\frac{1}{2} v\varrho \sin\mu$ bedraagt en dat de inhouden dezer verschillende ellipsen zich als de kleine assen verhouden moeten, dan volgt uit de gelijke omloopstijden, dat die assen zich verhouden als de sectorsnelheden; derhalve:

De kleine assen verhouden zich als de sinussen der hoeken tusschen de voerstraal en de aanvankelijke richting der snelheid.

d. Passen wij haar toe op de *aantrekking evenredig met den afstand*, dan blijkt, dat de uiteinden der *gelijke toegevoegde middellijnen* (want daar liggen dan de punten van maximale steilte der baan) voor alle van éénzelfde punt met dezelfde snelheid vertrekkende banen gelegen zijn op den-

zelfden cirkel beschreven met den straal $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)}$, zoodat dus de diagonaal van den rechthoek op de assen beschreven voor al deze ellipsen gelijke waarden verkrijgt.

e. In het *omgekeerde derdemachtsgebied* blijft A_w constant. Laten wij dus daar uit eenig punt eene baan met eene snelheid gelijk aan de cirkelsnelheid vertrekken, dan blijft $v\varrho$ en dus μ constant, dewijl dan overal blijkens (8) $d.\ v^2\varrho^2 = 0$. De beschreven baan zal dus in dat geval zijn eene logarithmische spiraal.

9. Stelling IV. *Beweegt zich een materieel deeltje in eene cirkelbaan, welke gelegen is in een stabiliteitsgebied en ondergaat de beweging eene geringe storing, dan zal de nieuwe baan een peri- en een apocentrum-afstand verkrijgen, die onderling en van den straal der oorspronkelijke cirkelbaan zeer weinig verschillen.*

Was de cirkelbaan daarentegen in een instabiliteitsgebied gelegen, dan zal na eene geringe storing de afstand van het apocentrum of die van het pericentrum of die van beiden tot het centrum belangrijk van den straal der cirkelbaan verschillen.

Bewijs. Na de storing zal de cirkelbaan, wier totale energie gelijk staat met dien der nieuwe baan in het algemeen iets verder van of iets dichter bij het centrum gelegen moeten zijn als de oude cirkelbaan, maar toch altijd op geringen afstand van deze verwijderd zijn. Die cirkelbaan van dezelfde energie als de nieuwe baan zal in een stabiliteitsgebied altijd door deze doorsneden worden, want vervolgt men de baan in de richting, welke naar haar toevoert, dan is de scherpe hoek μ afnemende, zooals onmiddellijk blijkt als men de eerste alinea van *stelling VII* toepast, daarbij lettende op de eigenschap van het stabiliteitsgebied, dat aldaar A_w met ϱ toe- en afneemt. Zoolang nu μ afneemt, gaat de begonnen verwijdering van of nadering tot het centrum zeker voort, zoodat, als gezegd, de cirkel van gelijke energie steeds bereikt moet worden. Op dezen cirkel heeft μ eene minimum-, ϱv eene maximum-waarde. Beschouwt men nu de beide takken, die van dit snijpunt uitgaan, dan zal op beide ϱv af-, μ toenemen. Immers bij de middelpuntvliedende tak gaat de plaatselijke cirkel-energie, die der baan

meer en meer overtreffen en moet dus ϱv afnemen, als ϱ toeneemt; bij de middelpuntzoekende daarentegen is de plaatselijke cirkelenergie kleiner dan die der baan, derhalve moet hier ϱv evenzeer afnemen, wijl ϱ afnemende is. Dit afnemen van ϱv geschiedt sneller en sneller naar gelang het punt verder van de cirkelbaan van gelijke energie verwijderd geraakt. Bedenkt men nu dat μ aanvankelijk, wegens de onderstelde geringheid der verstoring, reeds weinig van 90^0 verschilt, dan zal men inzien, dat de toename van $v\varrho$ spoedig $\sin \mu = \frac{B}{\frac{1}{2} v \varrho}$ in de eenheid zal doen overgaan, wanneer een *pericentrum* of *apocentrum* bereikt is. De middelpuntvliedende tak zal dus tot een *apo-* en de middelpuntzoekende tot een *pericentrum* moeten voeren zonder dat de voerstraal aanzienlijk toe- of afgenomen is.

Beschouwen wij nu de verstoorde cirkelbaan in een *instabiliteitsveld*, dan valt het gemakkelijk tot het besluit te komen, dat òf in den middelpuntvliedenden òf in den middelpuntzoekenden tak, en wel in dien tak, die is afgekeerd van de cirkelbaan, wier energie gelijk is aan die der gestoorde beweging, μ zal moeten blijven afnemen en $v\varrho$ toenemen tot het *instabiliteitsgebied* verlaten is.

In den anderen de cirkelbaan van gelijke energie naderenden tak zal daarentegen $v\varrho$ *af* en μ toenemen, en nu kan er van drie dingen één gebeuren, *òf* die cirkel wordt bereikt, dan zal van dit oogenblik af μ weer gaan afnemen, en de baan zal ook aan de andere zijde het instabiliteitsgebied verlaten, *òf* die cirkel doet dienst als asymptotische cirkel der baan, die dan een cirkelspiraaleinde verkrijgt, òf zij wordt niet bereikt, omdat vóór dien tijd een *apo-* of *pericentrum* is opgetreden. In dat geval is de afstand daarvan weinig verschillend van den straal der oorspronkelijke cirkelbaan. Welke van deze drie mogelijkheden werkelijkheid worden zal, hangt van den aard der verstoring af.

Gevolg. a. Is het geheele veld één enkel instabiliteitsgebied, dan heeft de geringste storing in de cirkelbaan van eenig materieel deeltje ten gevolge, dat het zich op den duur òf naar het centrum òf op oneindigen afstand van het

aantrekkende centrum begeeft. Daar ook alle andere banen in zulk een gebied òf naar het centrum òf naar het oneindige voeren, kan een materieel deeltje niet blijvend in het veld vertoeven, althans niet zonder telkens weer in het centrum te vallen. Iets als ons zonnestelsel is dus onmogelijk daar waar de aantrekkende krachten van dien aard zijn, dat zij één enkel doorloopend instabiliteitsveld in het leven roepen.

III. Stellingen over cirkelspiraaleinden.

10. Stellingen V. *Cirkelspiraaleinden kunnen alleen voorkomen binnen een instabiliteitsgebied. Banen met cirkelspiraaleinden bezitten dezelfde totale energie en sectorsnelheid als de cirkelbaan van den asymptotischen cirkel.*

Bewijs. Vervolgen wij een cirkelspiraalbaan, terwijl zij tot haar asymptotischen binnen- of buitencirkel nadert, dan zal de voerstraal ϱ meer en meer tot den straal van den asymptotischen cirkel ϱ naderen. Aangezien voorts de gansche gedaante der baan, dus ook haar kromtestraal, meer en meer overeenkomt met die van den asymptotischen cirkel, zoo zal v tot w_1, μ tot 90^0 moeten naderen. Iedere $f(\varrho, v, \mu)$ zal derhalve tot limiet moeten bezitten $f(\varrho_1, w_1, 90^0)$. Dit geldt ook voor de totale energie en de sectorsnelheid der baan, maar aangezien dit constante grootheden zijn, zoo moeten zij deze limietwaarde van den aanvang af bezitten. Men zal dus moeten hebben langs de gansche baan:

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_{\rho_0}^{\rho} F.\, d\varrho = \tfrac{1}{2} w^2{}_1 + \int_{\rho_0}^{\rho_1} F.d\varrho = A_{w_1}. \quad (10)$$

$$B = \tfrac{1}{2} \varrho\, v \sin \mu = \tfrac{1}{2} \varrho_1 w_1 . = B_{w_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Uit deze laatste vergelijking volgt:

$$\sin \mu = \frac{\varrho_1 w_1}{\varrho v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

maar daaruit blijkt onmiddellijk in verband met *stelling II*, dat zulke spiraaleinden in het *stabiliteitsgebied* onmogelijk zijn. Immers, beschouwen wij eerst een cirkelspiraaleinde met asymptotischen buitencirkel. Hier zal dan $A = A_{w_1}$ overal de plaatselijke energie der cirkelbeweging moeten overtreffen, dewijl de cirkelenergie met den straal toeneemt en dus binnen den asymptotischen cirkel overal minder zal moeten bedragen dan er op. Dan zal echter blijkens de eerste alinea dier stelling ϱv moeten toenemen met ϱ, dan zoude men overal moeten hebben $\varrho v < \varrho_1 w_1$; maar dan wordt de vergelijking (12) tot eene ongerijmdheid.

Op volkomen overeenkomstige wijze kan men aantoonen, dat ook cirkelspiraaleinden met asymptotischen binnencirkel onmogelijk zijn. Hier zoude A voortdurend kleiner dan de plaatselijke energie der cirkelbeweging moeten zijn, met het afnemen van ϱ zoude dus ϱv moeten toenemen, waaruit weder evenzeer volgt $\varrho v < \varrho_1 w_1$.

Dat cirkelspiraaleinden op een *afstootingsgebied* niet kunnen voorkomen behoeft wel geen betoog.

In een *omgekeerde-derdemachtsgebied* zullen zij evenmin optreden. Dewijl de plaatselijke cirkelenergie daar overal gelijk is, komen alleen banen in aanmerking, welker totale energie aan die der cirkelbeweging gelijk is, maar bij zulke banen blijft μ constant.

Alleen binnen een *instabiliteitsgebied* kunnen dus cirkelspiraaleinden bestaan, zooals wij zien zullen kunnen zij daar aan weêrskanten van iedere cirkelbaan voorkomen.

Gevolgen. a. Binnen éénzelfde instabiliteitsgebied kan eenzelfde baan geene twee cirkelspiraaleinden bezitten. Immers daar de totale energie der cirkelbeweging geregeld afneemt naar buiten toe, kan de totale energie der baan onmogelijk gelijk zijn aan die van twee verschillende cirkelbanen in datzelfde gebied.

b. Eene spiraalbaan met asymptotischen binnencirkel moet haar apocentrum, indien zij dit bezit, hebben buiten het instabiliteitsgebied, waarop de asymptotische cirkel ligt, want hare totale energie overtreft overal in dit gebied die der cirkelbeweging.

c. Eene spiraalbaan met asymptotischen buitencirkel moet haar pericentrum, indien zij dit bezit, hebben buiten het instabiliteitsgebied, waarin de asymptotische cirkel ligt.

11. STELLING VI. *Door ieder binnen een instabiliteitsgebied gelegen punt kan eene baan gevoerd worden, wier sectorsnelheid en wier totale energie overeenstemmen met die van iedere gegevene in hetzelfde instabiliteitsgebied gelegene cirkelbaan. Zulk eene baan eindigt in het algemeen aan de naar de cirkelbaan toegekeerde zijde in een cirkelspiraal met de cirkelbaan als asymptotischen cirkel. Uitzonderingen hierop kunnen zich voordoen als in de cirkelbaan de aantrekkende kracht zelve, of hare eerste afgeleide naar den straal oneindig groot wordt.*

Bewijs. Laat ϱ_1 zijn de straal van den cirkel, die de asymptotische buiten- op binnencirkel zal moeten worden van de cirkelspiraal, welke men wenscht aan te brengen door eenig punt P gelegen in hetzelfde instabiliteitsgebied op een afstand ϱ_2 van het centrum. Men heeft dan ter berekening van v_2 en μ_2, d. w. z. van grootte en richting der in P vereischte snelheid:

$$A = \tfrac{1}{2} v^2{}_2 + \int_{\rho_0}^{\rho_2} F\, d\varrho = \tfrac{1}{2} w^2{}_1 + \int_{\rho_0}^{\rho_1} F\, d\varrho = A_{w_1} \,. \quad (13)$$

$$B = \tfrac{1}{2} v_2 \varrho_2 \sin \mu_2 = \tfrac{1}{2} w_1 \varrho_1 = B_{w_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Oppervlakkig zoude het nu kunnen schijnen alsof v_2 onbestaanbaar of $\sin \mu_2$ grooter dan de eenheid zoude kunnen worden.

Om aan te toonen, dat v_2 altijd bestaanbaar gevonden wordt, lossen wij op uit (13):

$$v^2{}_2 = w^2{}_1 + 2 \int_{\rho_2}^{\rho_1} F\, d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Het blijkt dus onmiddellijk dat als $\varrho_2 < \varrho_1$ noodzakelijk $v^2{}_2 > w^2{}_1$ dus v_2 bestaanbaar zal zijn. Is daarentegen $\varrho_2 > \varrho_1$, dan is:

$$A = A_{w_1} > A_{w_2}$$

dus:

$$v^2_2 > w^2_2 ,$$

en dan evenzeer bestaanbaar.

Om nu te bewijzen, dat $w_1 \varrho_1 < v_2 \varrho_2$ en dus $\sin \mu < 1$ is, zenden wij van P uit met de snelheid v_2 eene radiale baan op den cirkel af. Het is gemakkelijk in te zien, dat deze altijd den cirkel bereiken moet. Daar ter plaatse is $w = w_1$, maar tevens is $v \varrho$ blijkens *Stelling II* daar een minimum. Overal elders, dus ook in P, is dus $v \varrho > w_1 \varrho_1$.

Hiermede is dus bewezen, dat door ieder punt van het *instabiliteitsgebied* eene baan gevoerd kan worden, die dezelfde sectorsnelheid en energie bezit als eene gegeven cirkelbaan in datzelfde gebied. Vervolgen wij nu zulk eene baan, in de richting van die cirkelbaan, dan is het vooreerst duidelijk, dat zij deze nimmer passeeren kan; immers in het snijpunt zouden de snelheden van beide banen wegens de gelijkheid van sectorsnelheid en energie naar grootte en richting moeovereenkomen; maar dan is er geene snijding meer. Evenmin kan de baan hare nadering tot de cirkelbaan staken. Dit zoude alleen kunnen gebeuren als μ door 90^0 heenging; maar vergelijkt men de snelheid in eenig punt met die in de straks te hulp geroepene rechtlijnige baan in de richting van den straal op denzelfden afstand, dan zal men inzien, dat steeds:

$$v \varrho > w_1 \varrho_1$$

en dus $\sin \mu$ kleiner dan de eenheid moet blijven.

Nu blijven er nog twee mogelijkheden over, òf de baan komt na een eindig aantal windingen tot raking met de cirkelbaan en vertoont dan in dit raakpunt eene aanraking van hoogere orde *), òf zij gaat voort asymptotisch tot de

---

*) Op het bestaan dezer beide mogelijkheden ben ik opmerkzaam geworden door eene mededeeling van J. Boussinesq in de *Compt. rend.* 84, p. 944—946. Deze spreekt daar van „une trajectoire circulaire $r = r_0$ „telle que le mobile pourra à partir d'un quelconque de ses points et

cirkelbaan te naderen. Tusschen die twee mogelijkheden kan worden beslist door den tijd te berekenen, die het materieele deeltje noodig heeft om langs de baan, die wij onderzoeken, te geraken van den afstand ρ, waarop dit

---

„sans que les équations différentielles cessent d'être satisfaites soit con„tinuer à la parcourir, soit en dévier pour décrire une nouvelle trajec„toire". Dit geldt dus voor *alle* cirkelbanen in een instabiliteitsgebied. Toch heeft het materieele deeltje dan in 't algemeen *geene* keus tusschen de beide banen, want om langs de spiraalbaan te geraken tot op een eindigen afstand van de cirkelbaan moet het een oneindig langen weg in een oneindig langen tijd afleggen. De kleinste eindige verstoring evenwel brengt het uit de cirkelbaan op eene baan, die in eindigen tijd op eindigen afstand van de cirkelbaan voert, welke afstand langen tijd en aanzienlijk kan blijven toenemen.

Als zeer bijzonder geval kunnen er ook cirkelbanen voorkomen, waar inderdaad eene keus bestaat tusschen twee banen. Dit kan gebeuren als F of als $\frac{dF}{d\rho}$ oneindig groot wordt op de cirkelbaan. Als voorbeeld wijzen wij op de cirkelbaan $\rho = \rho_1$ beschreven onder de krachtenwet $F = \frac{A}{\rho^3} - f(\rho - \rho_1)^{1/3}$. Die baan ligt in een instabiliteitsgebied. Nemen wij een punt P, gelegen op een afstand ρ_2 van het centrum, dan kan door dit punt eene baan:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} w^2{}_1 + \int_{\rho}^{\rho_1} F.\, d\rho \qquad \rho v \sin \mu = \rho_1 w_1$$

gevoerd worden. Daartoe wordt vereischt:

$$v^2 = \frac{A}{\rho^2} + \frac{3}{2} f(\rho - \rho_1)^{\frac{2}{3}}; \qquad \sin^2 \mu = \frac{A}{A + \frac{3}{2} f \rho^2 . (\rho - \rho_1)^{\frac{2}{3}}}$$

De tijd noodig om van den afstand ρ_2 te komen tot den afstand ρ_1 bedraagt dan:

$$T_{\rho_2}^{\rho_1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho - \rho_1)^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{6 f}.\, (\rho_1 - \rho_2)^{\frac{1}{3}}$$

en daar ook de snelheid overal eindig is, moet deze baan met een boog van eindige lengte naar de cirkelbaan voeren. Omgekeerd kan het deeltje op elk oogenblik de cirkelbaan verlaten langs zulk eene baan.

deeltje aanvankelijk is, tot den afstand ϱ_1, die overeenkomt met den straal van de cirkelbaan.

Men heeft:

$$\frac{d\varrho}{dt} = v \cos \mu = \sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \mu} = \sqrt{v^2 - \frac{w^2{}_1 \varrho^2{}_1}{\varrho^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(w_1{}^2 + 2\int_{\rho}^{\rho_1} F.\, d\varrho - \frac{w_1{}^2 \varrho_1{}^2}{\varrho^2} \right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

derhalve vindt men voor den tijd:

$$T_{\rho_2}^{\rho_1} = \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\varrho.\, d\varrho}{\sqrt{w_1{}^2 (\varrho^2 - \varrho_1{}^2) + 2\varrho^2 \int_{\rho}^{\rho_1} F.\, d\varrho}} \quad \ldots \quad (17)$$

Van deze integraal beschouwen wij slechts dat gedeelte, waarvoor het argument ϱ nog slechts zeer weinig van ϱ_1 verschilt. Stellen wij dan:

$$w_1{}^2 (\varrho^2 - \varrho_1{}^2) + 2\varrho^2 \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho = \varphi(\varrho) \quad \ldots \quad (18)$$

dan is:

$$\varphi(\varrho) = \varphi(\varrho_1) + (\varrho - \varrho_1)\varphi'(\varrho_1) + \frac{(\varrho - \varrho_1)^2}{1.\,2} \varphi''(\varrho_1 + \theta(\varrho - \varrho_1)) \,. \quad (19)$$

maar:

$$\varphi(\varrho_1) = 0;\ \varphi'(\varrho) = 2\varrho w_1{}^2 + 4\varrho \int_{\rho}^{\rho_1} F d\varrho - 2\varrho^2 F;\ \varphi'(\varrho_1) = 0 \,. \quad (20)$$

$$\varphi''(\varrho) = 2\, w_1{}^2 + 4\int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho - 8\, \varrho\, F - 2\, \varrho^2 \frac{dF}{d\varrho};$$

$$\varphi''(\varrho_1) = -6\, w_1{}^2 - 2\, \varrho_1{}^2 \left(\frac{d\,F}{d\varrho}\right)_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Wij mogen dus stellen:

$$T_{\rho}^{\rho_1} = \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varrho . d\varrho}{(\varrho - \varrho_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\varphi''(\varrho_1 + \theta(\varrho - \varrho_1))}} \quad . . . (22)$$

Nu is binnen een instabiliteitsgebied $\varphi''(\varrho_1)$ altijd positief; immers binnen zulk een gebied heeft men:

$$\frac{d . F\varrho^3}{d\varrho} < 0 ,$$

dus:

$$\varrho^3 \frac{dF}{d\varrho} + 3\varrho^2 F < 0$$

dus:

$$\left(3 w^2 + \varrho^2 \frac{dF}{d\varrho}\right) \varrho < 0 \quad . . . . . (23)$$

waaruit onmiddellijk volgt dat $\varphi''(\varrho_1)$ positief moet zijn.

Noem voorts α de grootste, β de kleinste waarde, welke de uitdrukking:

$$\frac{1}{\varrho} \sqrt{\tfrac{1}{2}\varphi''(\varrho_1 + \theta(\varrho - \varrho_1))} \quad . . . . (24)$$

binnen de grenzen ϱ en ϱ_1 verkrijgt, dan ligt de waarde van $T_{\rho}^{\rho_1}$ tusschen de beide grenzen:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho_1} \quad \text{en} \quad \frac{1}{\beta} \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho_1} \quad . . . (25)$$

en is dus in elk geval oneindig groot. Men heeft dus altijd te doen met banen die asymptotisch de cirkelbaan naderen zonder haar te bereiken, behalve alleen in het *zeer* bijzonder geval, dat:

$$\varphi''(\varrho_1) = -6 F_1 \varrho_1 - 2 \varrho_1^2 \left(\frac{dF}{d\varrho}\right)_1 = \infty \quad . . (26)$$

Dit geval vereischt natuurlijk een bijzonder onderzoek, dat somtijds tot eene raking van hoogere orde, somtijds weder tot een cirkelspiraal zal voeren. Eene raking van hoogere orde kan dus alleen plaats hebben als of de kracht zelve, of hare eerste afgeleide naar den afstand ergens oneindig groot worden.

Gevolgen. a. In een instabiliteitsgebied zijn aan weerskanten van iedere cirkelbaan cirkelspiraalbanen mogelijk. Alleen de grenscirkels tusschen een instabiliteits- en een stabiliteits- of afstootingsgebied kunnen slechts van ééne zijde door eene cirkelspiraalbaan genaderd worden.

12. Stelling VII. *Van uit ieder punt kunnen met eene gegevene snelheid v_1 zoovele* $\frac{\textit{middelpuntvliedende}}{\textit{middelpuntzoekende}}$ *banen met cirkelspiraaleinden worden afgezonden als er minimaalwaarden van $v\varrho$ kleiner dan de voorafgaande minimaalwaarden (geteld van het punt tot het* $\frac{\textit{oneindige}}{\textit{centrum}}$ *en kleiner dan de waarde $v_1 \varrho_1$ van dit produkt in het punt zelve (maar niet* NUL*) gelegen zijn op de radiale* $\frac{\textit{middelpuntvliedende}}{\textit{middelpuntzoekende}}$ *baan, welke met diezelfde snelheid begonnen wordt. De asymptotische cirkels dezer spiraaleinden gaan door de punten in de radiale baan, waar de minimumwaarden van $v\varrho$ optreden.*

Bewijs. Laat $v_2 \varrho_2$ zulk eene minimaalwaarde zijn, dan zal men, dewijl $v_2 \varrho_2 < v_1 \varrho_1$ van uit het gegeven punt met de snelheid v_1 eene baan kunnen laten vertrekken, onder den hoek μ, zoodat:

$$B = \tfrac{1}{2} v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \tfrac{1}{2} v_2 \varrho_2$$

Is $\varrho_2 > \varrho_1$ dan geve men deze baan eene middelpuntvliedende, in het tegengestelde geval eene middelpuntzoekende richting. Een *apo-* en *pericentrum* zal dan niet kunnen optreden vóór de voerstraal de waarde ϱ_2 aangenomen heeft, want tusschen ϱ_1 en ϱ_2 is overal op de radiale en dus ook op de afgezondene baan $v\varrho > v_2 \varrho_2$, dus $\sin \mu < 1$.

Een minimum van $v\varrho$ kan blijkens *Stelling II* slechts ge-

legen zijn in een instabiliteitsgebied. Zoodra echter de baan dit gebied betreedt, gelden de redeneeringen ten bewijze van *Stelling VI* aangevoerd en, behoudens de daar vermelde uitzondering, zal dus de baan eindigen in een cirkelspiraaleinde, terwijl ϱ_2 de straal wordt van den asymptotischen cirkel.

Een minimum van $v\varrho$ *grooter* dan $v_1\varrho_1$ of dan een voorafgaand minimum kan onmogelijk tot eene cirkelspiraalbaan aanleiding geven. Immers indien men de baan de vereischte sectorsnelheid geeft, dan wordt $\sin\mu$ in het ééne geval onmiddellijk > 1, in het andere wordt $\sin\mu > 1$ voor waarden der voerstraal die met een voorafgaand minimum overeenstemmen. De baan moet dus vóór die waarde bereikt is, een *apocentrum* vertoonen.

Overigens zal het wel onmiddellijk in 't oog vallen, dat iedere cirkelspiraal, die met de gegeven snelheid van het gegeven punt vertrekt, noodzakelijk tot asymptotischen cirkel één der cirkels moet hebben, welke gaan door de punten, waarvoor $v\varrho$ in de radiale baan minimale waarden verkrijgt.

Immers laat ϱ_2 de straal zijn van den asymptotischen cirkel, dan is:

$$A = A_{w_2}$$

dus:

$$lim.\ v = v_2 = w_2$$

en daar nu cirkelspiraaleinden alleen in een instabiliteitsgebied optreden kunnen, is blijkens *Stelling II* in de radiale baan daar ter plaatse een minimum van $v\varrho$ aanwezig.

IV. Stellingen betreffende het bereiken van het centrum en het oneindige.

13. Stelling VIII. *Wanneer van eenig punt P uit twee middelpuntzoekende banen met gelijke beginsnelheid vertrekken, dan zal de pericentrum-afstand, die voorkomt bij de steilste baan, kleiner moeten zijn (tenzij beide banen naar het centrum mochten voeren), dan die bij de minder steile baan.*

Vertrekken daarentegen van zulk een punt twee middelpuntvliedende banen van gelijke beginsnelheid, maar ongelijke richting, dan zal de apocentrum-afstand bij de steilste baan grooter moeten zijn dan bij de minder steile, tenzij beide tot het oneindige voeren.

Bewijs. Vergelijkt men met elkander de punten der beide middelpuntzoekende banen, wier voerstralen gelijk zijn, dan zijn in die punten ook de snelheden gelijk. Nu is echter het produkt $v \varrho \sin \mu$ voor de steilste baan voortdurend kleiner dan voor de minder steile, derhalve moet $\sin \mu$ bij de steilste baan kleiner zijn dan bij de andere. Voert nu de minder steile tot een pericentrum of tot een cirkelspiraaleinde, dan is aldaar $\sin \mu = 1$, dus van de steilere baan nog altijd < 1, zoodat deze nog in middelpuntzoekende richting voortgaat en tot kleinere waarden der voerstraal aanleiding geeft.

Het tweede gedeelte der stelling wordt door eene gelijksoortige redeneering bewezen.

Gevolgen. *a.* Voert eene van een bepaald punt uitgaande baan naar het centrum, dan voeren alle steilere banen van hetzelfde punt uitgaande met gelijke snelheid, eveneens naar het centrum.

b. Voert zulk eene baan daarentegen tot een *pericentrum* of *spiraaleinde*, dan eindigt bij alle minder steile banen van dezelfde beginsnelheid de middelpuntzoekende tak op een van deze beide wijzen.

c. Voert eene middelpuntvliedende baan naar het oneindige, dan doen dit ook alle steilere banen met dezelfde beginsnelheid.

d. Voert zulk eene baan tot een *apocentrum* of *spiraaleinde*, dan kunnen minder steile banen niet tot het oneindige voeren.

14. Stelling IX. *Strekt zich eenige baan tot in het centrum uit, dan zal men hebben bij de nadering tot het centrum:*

$$\lim v^2 \varrho^2 = \lim w^2 \varrho^2 = \lim F \varrho^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Bewijs. Laat ϱ_1 de voerstraal zijn van een der punten, waardoor de baan gaat, v_1 de snelheid in dit punt, dan is:

$$v^2 = v_1^2 + 2 \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

derhalve:

$$lim\ \varrho^2 v^2 = lim\ 2\, \varrho^2 \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Is nu *ten eerste* $lim \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho$ eindig, dan is $lim\ v\, \varrho$ NUL, maar dan moet wel tevens $lim\ F\varrho^3$ NUL zijn; want ware $lim\ F\varrho^3$ eindig, dan mag men, van af eene zekere waarde ϱ' der voerstraal tot in het centrum, stellen:

$$F\varrho^3 > \gamma\ ,$$

waarin γ eindig is. Dan echter is:

$$lim \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho \quad > \gamma .\ lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\varrho^3} = \infty$$

Is daarentegen *ten tweede* $lim \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho$ oneindig dan kan men schrijven:

$$lim\ \varrho^2 v^2 = lim \frac{2 \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho}{\varrho^{-2}} = lim \frac{-2F}{-2\varrho^{-3}} = lim F\varrho^3 = lim\ w^2 \varrho^2 .$$

zoodat in beide gevallen de stelling doorgaat.

15. STELLING X^a. *Ligt om het centrum heen een afstootingsgebied, of is in het centrum* $lim\ F\varrho^3 = 0$, *dan kunnen alleen radiale banen tot het centrum voeren. Alle andere banen, die het afstootingsgebied of stabiliteitsgebied betreden, dat het centrum omgeeft, bezitten daarbinnen een pericentrum.*

Is in het centrum $lim\ F\varrho^3 = \alpha^2$, *dan zullen slechts zulke banen, wier sectorsnelheid kleiner is dan* $\frac{1}{2}\alpha$, *en soms ook die*

wier sectorsnelheid gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$, *het centrum kunnen bereiken.*

Bewijs. Stellen wij ons eene baan voor, die naar een centrum voert, waar $F\varrho^3$ tot nul nadert, dan nadert dus ook $v\varrho$ onbepaald tot nul; maar dan kan ook de sectorsnelheid $\frac{1}{2} v\varrho \sin \mu$, die constant moet zijn, niet van nul verschillen. De baan moet dan radiaal zijn.

Is het centrum door een afstootingsgebied omringd en nadert $F\varrho^3$ tot nul, dan gaat dezelfde redeneering door. Is $lim\ F\varrho^3$ negatief eindig of oneindig groot, dan kan zelfs eene radiale baan niet tot het centrum voeren, althans bij eindige snelheid van vertrek, wat wij trouwens steeds onderstellen.

Nadert $F\varrho^3$ tot eene eindige positieve grenswaarde α, zooals zoowel bij een instabiliteits- als bij een stabiliteitsgebied voorkomen kan, dan zal $\frac{1}{2} v\varrho \sin \mu$ in de onmiddellijke nabijheid van het centrum en dan ook overal, de waarde $\frac{1}{2}\alpha \sin \mu_0$ moeten bezitten, als μ_0 de grenswaarde voorstelt, waartoe de hoek μ in het centrum nadert; derhalve is de sectorsnelheid van *alle* banen, die door het centrum gaan, kleiner dan $\frac{1}{2}\alpha$.

Indien zulke banen het centrum bereiken, dan nadert μ tot een zekere limiet en zij nemen dan in de nabijheid van het centrum den vorm aan eener logarithmische spiraal, die met een oneindig aantal windingen het centrum omgeeft, maar het toch in eindigen tijd bereikt.

16. Het antwoord op de vraag of eene baan, wier sectorsnelheid *juist* $\frac{1}{2}\alpha$ bedraagt, ook tot het centrum voeren kan, is van eenigszins meer ingewikkelden aard. In zulk eene baan moet in de nabijheid van het centrum noodzakelijk $lim\ \mu = 90^0$ worden, want $v\varrho \sin \mu = \alpha$ en $lim\ v^2\varrho^2 = lim\ F\varrho^3 = \alpha^2$. Zulk eene baan moet dus daar ter plaatse in middelpuntzoekende richting noodzakelijk voortdurend minder steil worden. Dit kan alleen dan het geval zijn, zooals wij weten, als $v > w$. Men moet dus hebben: $lim\ v \geqq lim\ w$. Laat nu ϱ_1 de voerstraal zijn van een punt zoo dicht bij het centrum, dat van daaraf tot in het centrum het produkt $F\varrho^3$ geregeld in denzelfden zin verandert, en stel:

$$F\varrho^3 = \alpha^2 + \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

dan is ε eene grootheid, die in een stabiliteitsgebied *positief*, in een instabiliteitsgebied *negatief* is, en met ϱ tot *nul* nadert.

Dan is:

$$v^2 = v_1^2 + 2\int_{\varrho}^{\varrho_1} F d\varrho = v_1^2 + \frac{\alpha^2}{\varrho^2} - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + 2\int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho \quad . \quad (31)$$

$$w^2 = F\varrho = \frac{\alpha^2}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

voorts:

$$v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Uit deze drie betrekkingen volgt:

$$v^2 - w^2 = v_1^2 \cos^2 \mu_1 + \left[2\int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho - \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \right] \quad . \quad (34)$$

Nu is het gemakkelijk in te zien, dat als ε van af ϱ_1 tot ϱ voortdurend afneemt, in *absolute* waarde:

$$2\int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho > \frac{\varepsilon}{\varrho^2}$$

waar nu, zooals in een stabiliteitsgebied, ε positief is, zal dus altijd aan de voorwaarde $\lim v > \lim w$ voldaan kunnen worden. Een met de sectorsnelheid α uit het punt, welks voerstraal is ϱ_1, afgezondene baan, zal noodzakelijk het centrum onbepaald moeten naderen, derhalve:

STELLING X_b. *Wordt het centrum omringd door een stabiliteitsgebied, dan zullen er altijd banen mogelijk zijn, die vertrekkende met de sectorsnelheid* $\frac{1}{2}\alpha$, *het centrum onbepaald naderen.*

Wat betreft den tijd, noodig om van het punt, welks voerstraal is ϱ_1, het centrum te bereiken, kan men opmerken, dat: (zie) 16)).

$$T = lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \mu}} =$$

$$= lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho^2}}} = lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + 2\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho}} . \quad (35)$$

Dewijl steeds:

$$v_1 \varrho_1 > \alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

en verder in een stabiliteitsgebied ε positief is, zoo nadert de noemer niet tot nul en de tijd wordt eindig, derhalve:

Stelling X^c. *In een stabiliteitsgebied, dat het centrum omringt, is de tijd noodig tot het bereiken van het centrum altijd eindig.*

17. Om te onderzoeken of ook in een instabiliteitsgebied banen wier sectorsnelheid bedraagt $\frac{1}{2}\alpha$ het centrum kunnen bereiken, denken wij ons $F\varrho^3$ naar de opklimmende machten van ϱ ontwikkeld, dan is blijkens (30):

$$\varepsilon = \varrho\left(\frac{d.F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + \frac{\varrho^2}{1.2}\left(\frac{d.^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\left(\frac{d.^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \text{enz.} \quad . \quad (37)$$

en voorts volgt uit (34):

$$v^2 - w^2 = v_1^2 \cos^2 \mu_1 + \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{2}{\varrho_1}\right\}\left(\frac{d.\,F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[2\,l\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) - 1\right]\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \tfrac{1}{6}\left[2\varrho_1 - 3\varrho\right]\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \text{enz.} \quad . \quad (38)$$

Hier wordt de tweede term van het tweede lid in 't algemeen in het centrum negatief oneindig groot. Het is dus in den regel onmogelijk v_1 zoodanig te kiezen, dat aan de voorwaarde $v > w$ in de nabijheid van het centrum is voldaan. Ditzelfde geldt — als soms $\left(\frac{d.\,F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0$ *nul* mocht zijn — voor den derden term van het tweede lid, want ook

dan moet $\left(\frac{d^2 F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)$ weder negatief worden, anders hadde men met een stabiliteitsgebied te doen en wordt de term ten duidelijkste oneindig groot voor $\varrho = 0$, derhalve:

STELLING X_d. *In een instabiliteitsgebied, dat het centrum omringt, kunnen geene banen, vertrekkende met eene sectorsnelheid* $\frac{1}{2}\alpha$, *het centrum bereiken, tenzij lim.* $\frac{d F\varrho^3}{d\varrho}$ *en lim.* $\frac{d^2 F\varrho^3}{d\varrho^2}$ *beiden nul zijn.*

Doet zich daarentegen het zeer bijzondere geval voor, dat *lim.* $\frac{d F\varrho^3}{d\varrho}$ en *lim.* $\frac{d^2 F\varrho^3}{d\varrho^2}$ beiden *nul* zijn, dan is het mogelijk voor waarden van v_1, die eene voldoende grootte bezitten, banen te verkrijgen, die met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\alpha$ in een instabiliteitsgebied tot het centrum voeren.

Als uitdrukking voor den tijd noodig om het centrum te bereiken vindt men dan door substitutie in (35):

$$t = lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + \frac{1}{3}(\varrho_1 - \varrho)\left(\frac{d^3 F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \frac{1}{24}(\varrho_1^2 - \varrho^2)\left(\frac{d^4 F\varrho^3}{d\varrho^4}\right)_0 + \text{enz.}}} \quad (39)$$

In den regel is die integraal eindig. En dit is zelfs *altijd* het geval als $\left(\frac{d^3 F}{d\varrho^3}\right)_0$ niet nul is. Alleen *als* deze uitdrukking nul is, kan zich het geval voordoen, dat de tijd oneindig groot wordt. Als voorbeeld daarvan kan dienen eene baan beschreven onder den invloed eener kracht:

$$F = \frac{\alpha^2}{\varrho^3} - \beta\varrho$$

Indien ϱ_1 voorstelt de voerstraal van een punt, gelegen in het instabiliteitsgebied, dat het centrum omringt, v_1 de snelheid en μ_1 de hoek tusschen raaklijn en voerstraal daar ter plaatse, dan vindt men voor den tijd, noodig om het centrum te bereiken, als $v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \alpha$:

$$T = lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} - \beta(\varrho_1^2 - \varrho^2)}}$$

Kiest men nu v_1 zoodanig dat:

$$v_1^2 = \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + \beta \varrho_1^2$$

dan wordt voor deze baan de tijd noodig tot het bereiken van het centrum oneindig groot, en dat er inderdaad zulk eene baan afgezonden worden kan, blijkt uit de benoodigde waarde voor μ_1, men vindt namelijk:

$$sin\, \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha^2} \varrho_1^4}}$$

waarvoor steeds kan worden gezorgd.

Alle steilere banen, die van dit punt met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\alpha$ vertrekken, bereiken het centrum in eindigen tijd, minder steile bereiken het niet.

18. Stelling XI. *In eenig instabiliteitsgebied, dat zich tot in het oneindige uitstrekt, is de cirkelsnelheid grooter dan de snelheid, die aan eenig materieel deeltje gegeven moet worden om in radiale richting het oneindige te bereiken. In een stabiliteitsgebied, dat zich tot in het oneindige uitstrekt, is het omgekeerde het geval.*

Bewijs. Het eerste gedeelte der stelling is eigenlijk reeds bewezen in *Gevolg g* der eerste stelling, want indien eene in schuine richting afgezondene baan het oneindige bereikt, dan zal dit blijkens *stelling VIII* à fortiori het geval moeten zijn met eene radiale baan.

Zie hier een ander bewijs, tevens van het tweede gedeelte der stelling. Laat ϱ_1 de afstand zijn van eenig punt in zulk een $\frac{\text{instabiliteits}}{\text{stabiliteits}}$ gebied gelegen, dan is voor iedere grootere afstand: $F\varrho^3 \lessgtr F_1 \varrho_1^3$, derhalve:

$$\int_{\rho_1}^{\infty} F\,d\varrho \lesseqgtr F_1\,\varrho_1^3 \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^3} \lesseqgtr \tfrac{1}{2} F_1\,\varrho_1 \quad \ldots\ldots (40)$$

dus, als wij de snelheid noodig om in radiale richting het oneindige te bereiken u_1 noemen:

$$u_1 \lesseqgtr w_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

naar gelang het bedoelde gebied een *instabiliteits* of een *stabiliteitsgebied* voorstelt.

Gevolg a. Iedere baan vertrekkende in een stabiliteitsgebied met eene snelheid grooter dan of gelijk u_1, zal ook noodzakelijk een oneindig voortloopende tak moeten bezitten.

Immers zal, blijkens hetgeen bewezen is, als men de baan in middelpuntvliedende richting volgt, de snelheid in de baan, die altijd voldoende moet blijven om het oneindige te bereiken, overal de plaatselijke cirkelsnelheid overtreffen; dus kan geen apocentrum optreden.

19. Stelling XII. *Wanneer eene baan zich tot in het oneindige voortzet, terwijl overal de snelheid juist voldoende is, om langs de radiale baan tot in het oneindige te voeren, dan is:*

$$lim\, v_\varrho = lim \sqrt{F\varrho^3} = lim\, w_\varrho$$

Bewijs. Laat u_1 de snelheid zijn op een afstand ϱ_1 van het centrum, dan is dus volgens onderstelling:

$$u_1^2 = 2\int_{\rho_1}^{\infty} F\,d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Nu is overal elders:

$$v^2 = u_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\,d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

dus:

$$lim\, \varrho^2 v^2 = lim\, \varrho^2 (u_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\,d\varrho) = lim \frac{u_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\,d\varrho}{\varrho^{-2}} \quad . (44)$$

Bij de limiet gaat deze uitdrukking over in $\frac{0}{0}$; maar teller en noemer differentieerende, vindt men onmiddellijk:

$$lim\ \varrho^2\ v^2 = lim\ \frac{-2F}{-2\varrho^{-3}} = lim\ F\varrho^3 \quad . \ . \ . \ (45)$$

V. Toepassingen.

20. I. *Bepaal de verschillende hoofdvormen der banen, die optreden kunnen onder de werking eener gegeven krachtenwet, wanneer een materieel deeltje van een gegeven punt met gegeven snelheid, maar telkens in verschillende richtingen, vertrekt.*

Men begint met aan te brengen alle banen, die tot cirkelspiraaleinden voeren. Daartoe is het blijkens *stelling VII* voldoende de punten te bepalen op de radiale baan, die met dezelfde snelheid van uit hetzelfde punt afgezonden wordt, voor welke $v\varrho$ eene minimumwaarde aanneemt.

Om die punten te vinden moet men oplossen de, in het algemeen transcendentale, vergelijking:

$$A_w = A \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (46)$$

dat wil zeggen:

$$\tfrac{1}{2}\varrho F + \int_{\rho_0}^{\rho} F\,d\varrho = \tfrac{1}{2}\ v_1^2 + \int_{\rho_0}^{\rho_1} F.d\varrho \quad . \ . \ . \ (47)$$

Heeft men echter vooraf het veld verdeeld in stabiliteits- instabiliteits- en afstootingsgebieden, dan zijn de wortels reeds gescheiden. In ieder stabiliteits- en instabiliteitsgebied kan namelijk volgens *Stelling II*, *Gevolg a* slechts één wortel gelegen zijn. Bovendien behoeft men slechts die wortels te kennen, welke in instabiliteitsgebieden gelegen zijn, want die in een stabiliteitsgebied voeren tot maximumwaarden van $v\varrho$. Eindelijk moeten, als de radiale baan niet

tot het oneindige of tot het centrum voert maar eindpunten bezit, waar de snelheid omkeert, onmiddellijk de wortels verworpen worden gelegen buiten deze eindpunten.

Om nu te weten of in een gegeven instabiliteitsgebied, 't welk door de radiale baan betreden wordt, al of niet een wortel ligt, bepale men de waarde van A_w op de beide grenzen. Ligt de waarde van A daartusschen, dan alleen is er een wortel, die dan door benadering gevonden worden kan.

Eenige moeilijkheid kan dit nog opleveren bij het buitenste instabiliteitsgebied, indien dit zich tot in het oneindige uitstrekt, of bij het binnenste, indien dit het centrum onmiddellijk omgeeft. In het eerste geval moet men bepalen $lim\ A_w$ voor $\varrho = \infty$, in het tweede voor $\varrho = 0$.

De bepaling van $lim\ A_w$ voor $\varrho = \infty$ levert, als het laatste gebied een instabiliteitsgebied is, geene bijzondere moeilijkheid op, want is $lim\ F\varrho^3$ eindig of *nul*, dan is $lim\ F\varrho$ ZEKER nul, dus:

$$lim\ A_w\ (\varrho = \infty) = \int_{\varrho_0}^{\infty} F d\varrho \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (48)$$

Daarentegen neemt $lim\ A_w$ voor $\varrho = 0$ en in een instabiliteitsgebied meestal een onbepaalden vorm aan, en dan kunnen de volgende opmerkingen zeer tot bekorting bijdragen:

1e. *Is $lim\ F\varrho^3$ oneindig, dan is ook limiet A_w oneindig.* Immers men heeft blijkens (6):

$$\frac{d\,A_w}{d\varrho} = \frac{1}{2\,\varrho^2}\,\frac{d\,F\varrho^3}{d\varrho}$$

Beschouwt men de toename van A_w en $F\varrho^3$ als men van af een afstand ϱ_1 tot op een kleiner afstand ϱ_2 van het centrum nadert, dan is daarbij dus:

$$\Delta\,A_w > \frac{1}{2\,\varrho_1^2}\,\Delta\,F\varrho^3 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (49)$$

waaruit onmiddellijk volgt, dat als $F\varrho^3$ oneindig wordt, zulks ook met A_w het geval moet zijn:

2e. *Ook dan wanneer $F\varrho^3$ tot een eindige limiet nadert, zal A_w nog oneindig groot worden, tenzij lim $\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)$ en lim $\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)$ beiden nul worden.*

Men mag als *lim* $F\varrho^3$ eindig is, stellen:

$$F\varrho^3 = (F\varrho^3)_0 + \varrho\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + \frac{\varrho^2}{1.2}\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \ldots (50)$$

Dan is echter:

$$A_w = \tfrac{1}{2}F\varrho + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F d\varrho = \frac{1}{2\varrho_0^2}(F\varrho^3)_0 + \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(2 + l\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right)\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{1}{12}(3\varrho - 2\varrho_0)\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \ldots (51)$$

welke uitdrukking altijd ∞ wordt, tenzij de bedoelde differentiaalquotienten *nul* worden. Alleen *dan* is dus eene eigenlijke berekening van *lim* A_w noodig.

21. Heeft men nu de voerstralen bepaald van al die punten in de radiale baan waar $v\varrho$ minimale waarden verkrijgt, dan berekene men die minimale waarden zelve. Zeer wordt die berekening vereenvoudigd door de opmerking, dat volgens *stelling II* in die punten $v = w$, dus:

$$v\varrho = w\varrho = \sqrt{F\varrho^3}$$

is.

In overeenstemming met *stelling VII* moet men nu verwerpen al die punten voor welke $v\varrho > v_1\varrho_1$, alsmede die voor welke $v\varrho$ waarden verkrijgt *grooter* dan de waarde dier uitdrukking voor een der andere punten tusschen dit punt en het punt van vertrek gelegen.

Zooveel punten nu overblijven, zooveel banen kunnen met

de gegeven snelheid van het punt vertrekkende, tot een spiraaleinde voeren. De voerstralen der punten zijn daarbij de stralen der asymptotische cirkels.

Laat ϱ_p de voerstraal van, v_p de snelheid in de radiale baan voor zulk een punt voorstellen, μ_p de hoek waaronder de bijbehoorende baan met cirkelspiraaleinde het punt van vertrek verlaten moet, dan is blijkens *stelling VII:*

$$\sin \mu_p = \frac{v_p \varrho_p}{v \varrho} = \frac{w_p \varrho_p}{v \varrho}.$$

Zoo kan men dus in het gegeven punt alle banen aanbrengen, die voor de gegevene snelheid tot cirkelspiraaleinden voeren. Ligt van eenige baan de hoek van vertrek tusschen die van twee banen met cirkelspiraaleinden, dan moet zij een apo- of pericentrum bezitten, gelegen binnen het gebied begrensd door de beide asymptotische cirkels der cirkelspiraaleinden. Zijn de banen met cirkelspiraaleinden beide middelpuntzoekend of beide middelpuntvliedend, dan zal men het gedeelte van het veld waar het peri- of apocentrum liggen kan, nog kunnen beperken door de opmerking, dat het zich zeker niet bevinden kan in het instabiliteitsgebied, behoorende bij de minst steile der beide banen met cirkelspiraaleinden.

Daaruit volgt dan, dat, als de snelheid, geleidelijk van richting verandert, bij het passeeren van een der richtingen, die tot het ontstaan van banen met cirkelspiralen aanleiding geven, een sprong plaats heeft in den afstand van het apocentrum, van welke sprong in § 4 verklaring gegeven is uit een zuiver wiskundig oogpunt.

Wenscht men voor eene gegevene baan de voerstraal van het peri- of apocentrum te vinden, dan volstaat de opmerking, dat die voerstraal gelijk is aan die van het punt in de radiale baan, alwaar voor de eerste maal — gerekend van af het punt van vertrek — de betrekking:

$$v \varrho = v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

*) Uit deze betrekking volgt:

$$\rho^2 \left(v_1^2 - 2 \int_{\rho_1}^{\rho} F \, d\rho\right) = v_1^2 \rho_1^2 \sin^2 \mu_1.$$

doorgaat. Van die voerstraal toch, wordt in de gegeven baan $\sin \mu = 1$ dus $\mu = 90^0$.

22. Zijn nu de beide steilste banen bepaald, welke in middelpuntvliedende en middelpuntzoekende richting tot cirkelspiraaleinden voeren, dan blijft nog slechts over het onderzoek der steilere banen.

Wat de *middelpuntvliedende banen* betreft, is de beslissing nu uiterst gemakkelijk geworden. *Zij hangt slechts af van de vraag of de radiale baan naar het oneindige voert, m. a. w. of de halve levende kracht voldoende is om den arbeid te overwinnen noodig om het deeltje door alle aantrekkingsgebieden heen naar het oneindige te voeren.* Immers is die levende kracht daartoe *onvoldoende*, dan moet er natuurlijk een apocentrum zijn. Het produkt $v\varrho$ zal in de radiale baan na door de laatste minimaalwaarde gegaan te zijn, aanvankelijk toenemen om later weer af te nemen en met de snelheid nul te worden. Vooraf zal het een oogenblik gelijk worden van $v_1 \varrho_1 \sin \mu_1$, wanneer de apocentrumafstand der baan is bereikt.

Is de levende kracht daarentegen *meer dan voldoende*, dan

Dit is de bekende vergelijking in ρ, dienende ter bepaling van de afstanden der toppen eener centrale baan tot het centrum. Natuurlijk ware de oplossing van het vraagstuk, dat ons bezighoudt, ook langs zuiver algebraïschen weg uit deze vergelijking te verkrijgen.

Banen met een apo- en pericentrum ontstaan als deze verg. twee wortels heeft, waartusschen ρ_1 gelegen is. Ligt er geen wortel tusschen ρ_1 en ∞, of geen tusschen ρ_1 en *nul*, dan gaat de baan naar het oneindige of naar het centrum.

Overgangen tusschen deze gevallen vinden plaats, wanneer een der beide wortels, waartusschen ρ_1 ligt, met een anderen samenvalt. Dit kan alleen geschieden voor waarden van die wortels, welke voldoen aan de afgeleide verg.:

$$2\rho \int_{\rho_1}^{\rho} F d\rho + F\rho - v_1^2 = 0,$$

welke identisch is met onze verg. $A_w = A$. In het overgangsgeval ontstaan in den regel cirkelspiraaleinden.

Wil men verder in bijzonderheden treden, grenzen van de wortels der vergelijking en hare afgeleide vaststellen, regels aangeven om te bepalen, welke wortels der afgeleide werkelijk tot een overgangsgeval voeren kunnen, enz., dan treden een voor een al de moeilijkheden op, die in het bovenstaande op, naar het mij voorkomt, meer aanschouwelijke wijze overwonnen zijn.

moet de baan naar het oneindige gaan, want hare sectorsnelheid is kleiner dan die der steilste cirkelspiraalbaan voor welke zij gelijk is aan de helft der kleinste minimaalwaarde van $v\varrho$ gelegen tusschen het punt van vertrek en het oneindige. Derhalve is overal:

$$v\varrho \sin\mu = v_1\varrho_1 \sin\mu_1 < v\varrho$$
$$\sin\mu < 1.$$

Eenige meerdere moeilijkheid heeft het in te beslissen tusschen de beide mogelijkheden, als de levende kracht *juist voldoende* is. Dan toch neemt de limietwaarde van $v\varrho$ een onbepaalden vorm aan. Nu komt ons echter *stelling XII* te hulp ter bepaling dezer limietwaarde. Is die limietwaarde $\sqrt{F\varrho^3}$ *grooter* dan de kleinste minimaalwaarde van $v\varrho$ tusschen het punt van vertrek en het oneindige, en — indien iedere minimaalwaarde kleiner dan $v_1\varrho_1$ ontbreken mocht — dan $v_1\varrho_1$, dan voeren al de banen, steiler dan de steilste middelpuntvliedende cirkelspiraalbaan, of, als zulk eene ontbreekt, alle middelpuntvliedende banen, naar het oneindige.

Is de limietwaarde $\sqrt{F\varrho^3}$ daarentegen kleiner dan $v_1\varrho_1$ en kleiner dan de kleinste minimaalwaarde, dan bestaat er een nieuwe grenshoek μ_p, te berekenen uit:

$$\sin\mu_p = \frac{\sqrt{F\varrho^3}}{v_1\varrho_1}$$

zoodat alle steilere banen evenals de baan die onder dien grenshoek vertrekt zelve, naar het oneindige voeren, alle minder steile een apocentrum bezitten tusschen de buitenste grens van het instabiliteitsgebied der steilste cirkelspiraalbaan en het oneindige. De baan, die onder den grenshoek zelf vertrekt, bezit de eigenaardigheid dat zij zich meer en meer loodrecht stelt op de voerstraal. Ook de andere banen, die het oneindige bereiken, hebben daartoe oneindig veel windingen noodig, maar de hoek tusschen voerstraal en baan nadert hier tot eene andere grens.

23. Wat de *middelpuntzoekende banen* betreft steiler dan de steilste middelpuntzoekende baan met cirkelspiraaleinde, om hier te beslissen of het centrum al of niet bereikt worden

zal, *bepale men eerst lim* $\sqrt{F\varrho^3}$ *voor* $\varrho = 0$. *Is deze limiet nul* dan bezitten volgens *Stelling* X_a al de bedoelde banen een pericentrum. Ditzelfde is het geval als er om het centrum heen een afstootingsgebied ligt en de limiet dus onbestaanbaar wordt.

Is lim. $\sqrt{F\varrho^3}$ *daarentegen oneindig groot, of ook maar grooter dan* $v_1 \varrho_1$ *of grooter dan de kleinste minimaalwaarde van* $v\varrho$ *gelegen tusschen het punt van vertrek en het centrum*, dan voeren al deze banen naar het centrum; indien althans de radiale baan daar henen voert, wat belet zoude kunnen worden door de aanwezigheid van een afstootingsgebied. In dat laatste geval bezitten natuurlijk al de banen weer een pericentrum.

Een nader onderzoek is dus alleen noodig in het geval dat $lim \sqrt{F\varrho^3} = \alpha$ eindig is, kleiner dan $v_1 \varrho_1$, en kleiner dan de kleinste minimaalwaarde van $v\varrho$ in de richting van het centrum.

Er ontstaat dan een nieuwe grenshoek:

$$\sin \mu_p = \frac{\sqrt{F\varrho^3}}{v_1 \varrho_1}$$

zoodat de steilere banen door het centrum gaan, de minder steile een apocentrum bezitten.

Het grensgeval is in § 16 uitvoerig onderzocht, waarheen wij verwijzen.

II. 24. *Bepaal de verschillende hoofdvormen der banen, beschreven onder de werking eener aantrekkende kracht* $F = f\varrho^n$, *en de voorwaarden waaronder zij ontstaan.*

Eerste geval $n \geqq -1$.

Behalve radiale banen en cirkelbanen, die wij in het vervolg stilzwijgend uitgezonderd denken, is er slechts *ééne* soort van banen mogelijk, namelijk *banen, die zoowel een apocentrum als een pericentrum bezitten.* Immers de arbeid om het oneindige te bereiken is oneindig groot, dus zijn er nooit oneindige takken. *Lim.* $F\varrho^3$ is *nul*, dus wordt het centrum niet bereikt. Het gansche gebied is een stabiliteitsgebied, dus zijn er geene cirkelspiraaleinden.

Tweede geval. $-1 > n > 3$.

Er zijn *twee* soorten van banen. *De eerste soort bezit een apocentrum en een pericentrum.* Zij ontstaat als $v_1 < \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$; dan toch is de levende kracht onvoldoende om de arbeid te leveren tot het bereiken van het oneindige noodig. *De tweede soort bezit oneindige takken en een pericentrum.* Zij ontstaat altijd als $v_1 \geqq \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$ blijkens *Stelling XI. Gevolg a.*

Derde geval. $n = -3$.

Er zijn *drie* soorten van banen. *De eerste soort gaat door het centrum en bezit een apocentrum.* Zij ontstaat als $v_1 < w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$. Immers blijkens *Stelling I. Gevolg. h* moet de baan dan in middelpuntzoekende richting tot in het centrum voeren, tevens kan zij geen oneindige takken hebben, omdat de levende kracht onvoldoende is. *De tweede soort bezit een oneindigen tak en voert tot het centrum.* Zij ontstaat indien gelijktijdig $v_1 \geqq w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ en $\sin \mu_1 \leqq \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1 v_1}$ Immers blijkens *Stelling I, Gevolg g* moet dan in middelpuntvliedende richting een oneindige tak optreden, terwijl door toepassing van § 21 onmiddellijk gevonden wordt dat het centrum bereikt zal moeten worden. Deze tweede soort bevat in zich de banen in den vorm van logarithmische spiralen, die ontstaan als $v_1 = w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$. (*Zie Stelling III, Gevolg e*).

De derde soort bezit een pericentrum en twee oneindige takken. Zij ontstaat als $v_1 > w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ en gelijktijdig $\sin \mu_1 > \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1 v_1}$.

Vierde geval $n < -3$.

Er zijn *vijf* soorten van banen. *De eerste soort gaat door het centrum en bezit een apocentrum.* Zij ontstaat *altijd*

als $v_1 < \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$; dan toch kunnen geen oneindige takken optreden, omdat de levende kracht onvoldoende is. Bovendien is dan $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho^{n+1}}$ en moet dus blijkens *Stelling I, Gevolg h* de baan in middelpuntzoekende richting tot het centrum voeren. Zij ontstaat *nooit* als $v_1 > w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$, want dan voert de baan blijkens *Stelling I, Gevolg g* tot in het oneindige. Ligt v_1 tusschen die beide grenzen, dan zal er een grenshoek μ' zijn aan te wijzen, zoodanig dat de baan welke in middelpuntvliedende richting onder dien grenshoek vertrekt tot een cirkelspiraaleinde voert, iedere steilere tot het oneindige, iedere minder steile tot een apocentrum. Ten einde die grenshoek te vinden bepale men uit verg. (47) de waarde der voerstraal voor welke $v\varrho$ een minimum wordt; men vindt:

$$\varrho = \left(\frac{-n-1}{-n-3}\cdot\frac{v_1^2}{f} - \frac{2}{-n-3}\varrho_1^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Voor de waarde $v\varrho$ zelve, die daarbij behoort, vindt men:

$$v\varrho = \sqrt{F\varrho^3} = \sqrt{f}\cdot\left(\frac{-n-1}{-n-3}\frac{v_1^2}{f} - \frac{2}{-n-3}\varrho_1^{n+1}\right)^{\frac{n+3}{2(n+1)}},$$

en derhalve voor den grenshoek:

$$\sin\mu' = \frac{\sqrt{f}\cdot\left(\frac{-n-1}{-n-3}\frac{v_1^2}{\varrho} - \frac{2\varrho_1^{n+1}}{-n-3}\right)^{\frac{n+3}{2(n+1)}}}{v_1\varrho_1}.$$

De tweede soort gaat door het centrum en bezit een cirkelspiraaleinde met asymptotischen buitencirkel. Deze ontstaat zoodra $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$ en $\mu_1 = \mu'$.

De derde soort gaat door het centrum en bezit een oneindige tak. Deze ontstaat, zooals wij zagen, zoodra $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$ maar $> \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$ en tevens $\mu_1 < \mu'$. Zij kan echter ook ontstaan als $v_1 \overset{=}{>} w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$. In dat geval bezit de baan in middelpuntvliedende richting altijd

een oneindige tak blijkens *Stelling I, Gevolg g.* Is $v_1 = w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$ dan voert de middelpuntzoekende tak blijkens *Stelling I, Gevolg h* stellig naar het centrum en ontstaat dus eene baan van de derde soort. Is $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$, dan is er weer een grenshoek μ' aan te wijzen, voor welke de vroeger ontwikkelde formule geldt, van dien aard, dat de onder dien toch vertrekkende baan tot een cirkelspiraaleinde met asymtotische binnencirkel voert. Iedere minder steile baan bezit dan een pericentrum, iedere steilere voert tot het centrum en is dus van de derde soort.

De vierde soort bezit een oneindigen tak en een cirkelspiraaleinde met asymptotischen binnencirkel. Zij ontstaat als $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$ en bovendien $\mu_1 = \mu'$.

De vijfde soort bezit een pericentrum en twee oneindige takken. Zij ontstaat als: $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$ en bovendien $\mu_1 > \mu'$.

III. 23. *Bepaal aard en grenzen der gebieden welke ontstaan in het vlak van een homogeenen ring van materie, welke aantrekt volgens de wetten der algemeene aantrekkingskracht.*

Het kwam mij wenschelijk voor dit vraagstuk te behandelen, ten einde te doen zien dat de NEWTON'sche aantrekkingskracht tot het ontstaan van instabiliteitsgebieden aanleiding geven kan.

Het spreekt van zelve, dat men de aantrekking die van zulk een ring uitgaat in haar eigen vlak, kan opvatten als eene centrale kracht met het middelpunt van den ring tot centrum. Stelt M de massa voor van den ring, R zijn straal, kiest men de constante der aantrekkingskracht als eenheid van kracht, en voert men in de volledige elliptische integralen.

$$\omega(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}}; \quad \vartheta(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi . \sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}.$$

Stelt men voorts: $\varrho = R \cot^2 \frac{1}{2}\theta$; dan wordt de potentiaal V der aantrekkende kracht in eenig punt buiten den ring:

$$V = \frac{2 M \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \omega(\theta).$$

Daaruit wordt dan door differentiatie naar ϱ, en onder toepassing der formule:

$$\omega'(\theta) = -\cot\theta \,.\, \omega(\theta) + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\,\vartheta(\theta)$$

gemakkelijk gevonden:

$$F = \frac{M \,.\, \sin^4 \frac{1}{2}\theta}{\pi R^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta}\left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right].$$

Voor den afstand ϱ_0 op welke de potentieele energie gelijk *nul* gerekend is, nemen wij de waarde oneindig groot, dan is de totale energie van eenig materieel deeltje dat eene bepaalde baan beschrijft:

$$A = \tfrac{1}{2}v^2 - 2\int_{\varrho}^{\infty} F\,d\varrho = \tfrac{1}{2}v^2 - \frac{2\,M \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \,.\, \omega(\theta).$$

Verder is:

$$w^2 = \varrho\,F = \frac{M \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R}\left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right]$$

en daaruit volgt:

$$A_w = \frac{M \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R}\left[-3\,\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right]$$

$$B_w^2 = \varrho^2 w^2 = \frac{M \,.\, \cos^4 \frac{1}{2}\theta}{\pi \sin^2 \frac{1}{2}\theta}\left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right].$$

Binnen den ring is natuurlijk een afstootingsgebied aanwezig. Even buiten den ring wordt A_w zeer groot, en *op* den ring zelfs oneindig groot, waarvan men zich gemakkelijk overtuigen kan, door θ te laten naderen tot de limiet 90^0. Vervolgens neemt A_w af, als ϱ toeneemt. De ring wordt dus omgeven door een *instabiliteitsgebied.* Dit moet echter later weder een *stabiliteitsgebied*, want de aantrekkingswet, nadert tot de grenswaarde $F = \frac{M}{\varrho^2}$, welke grenswet een *stabiliteitsgebied* oplevert. De afscheiding tusschen beide soorten van gebied bevind zich daar waar:

$$\frac{d\,.\,A_w}{d\,\varrho} = -\frac{1}{R}\,.\,\frac{\sin^3 \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta}\,.\,\frac{dA_w}{d\,\theta} = 0.$$

Onder toepassing der formule:

$$\vartheta'(\theta) = \cot\theta\,(\vartheta(\theta) - \omega(\theta))$$

vindt men, na uitvoering der differentiaties, dat ter bepaling van die afscheiding moet opgelost worden de verg.:

$$\omega(\theta) = \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\theta}{\cos^2\theta} \cdot \vartheta(\theta).$$

Men vind daaruit:

$$\theta = 76^0 29' 30''$$

$$\varrho = 1{,}609^5\, R.$$

Derhalve is de materieele ring omringd tot op den afstand

$$R_1 = 1{,}609^5\, R$$

door een instabiliteitsgebied, binnen welk gebied zich dus onder de werking der NEWTON'*sche aantrekkingskracht cirkelspiraalvinden, en labiele cirkelbanen voordoen kunnen.*

Op den grenscirkel tusschen het stabiliteits- en instabiliteitsgebied is:

$$A_w = -\,0{,}7742\,\frac{M}{\pi R},$$

alwaar het negatieve teeken aanwijst, dat de levende kracht der cirkelbeweging onvoldoende zoude zijn om den arbeid noodig tot het bereiken van het oneindige te leveren. Dichter bij den ring neemt echter A_w toe en wordt ten slotte positief, zoodat men daar cirkelbanen verkrijgt, die met snelheden doorloopen worden zoo groot, dat de levende kracht meer dan voldoende zoude zijn om dien arbeid te verrichten.

Dit doet zich voor zoodra:

$$A_w > 0$$

'tgeen vereischt:

$$\theta > 84^0\, 55'\, 30''$$

$$\varrho < 1{,}194\, R.$$

Amsterdam, Maart 1884.

OVER HET VERMOGEN

VAN DEN

10 VOETS KIJKER VAN HUYGENS,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS,

Ons, thans rustend, medelid HARTING heeft, zooals bekend is, in het jaar 1867 door een toeval ontdekt, dat het door CHR. HUYGENS vervaardigde objectief met een brandpuntsafstand van 10 rijnl. voet (volgens de bepaling van den Heer HARTING 3,17 M. volgens mijne bepaling 3,33 M.), waarmede hij den wachter van Saturnus ontdekte, zich onder eenige andere oude lenzen, op het physisch kabinet te Utrecht bevond. Die lens is vlakbol, zij heeft eene middellijn van 57 mM., en eene dikte van 3,2 mM. Aan den omtrek is met kleine cursieve letters het anagram geschreven: Admovere oculis distantia sidera nostris, en daartegenover: 3 FEBR. CIↃIↃCLV. Dit anagram was een raadsel, zooals, naar den smaak van die tijden, door hem, die vermoedde eene ontdekking gemaakt te hebben, voorloopig opgegeven werd, om, mocht iemand anders zich haar toeeigenen, het prioriteitsrecht te kunnen doen gelden.

Er behooren eigenlijk nog de enkele letters vvvvvvvv ccc rr hmsbqx bij, en behoorlijk gerangschikt kan de oplossing van het raadsel eruit samengesteld worden: Saturnus luna sua circumducitur sexdecim diebus horis quatuor.

Men zie over deze ontdekking van ons medelid het *Album der Natuur*, 1867, blz. 274 en verv.

Reeds lang had ik gewenscht, in een kijker, met hetzelfde

objectief samengesteld, die hemellichten te beschouwen, welke HUYGENS er zelf mede had waargenomen. In de eerste plaats om mij meer in zijn toestand te kunnen verplaatsen, om mij beter te kunnen voorstellen wat hij gezien moet hebben, verder ook om het beeld van hetzelfde hemellicht, door een zeventiende- en door een negentiende-eeuwschen kijker gezien, met elkander te vergelijken.

Ik wachtte daarmede tot den vorigen winter, omdat de ring van Saturnus dan nagenoeg zoover mogelijk open zou zijn.

Indachtig aan het woord van ARGELANDER: Beobachtungen im Pulte sind keine Beobachtungen, en vertrouwende dat ook mijne medeleden, wel eenig belang zullen stellen in het weinige, dat mijn onderzoek heeft opgeleverd, neem ik de vrijheid daaromtrent hier iets mede te deelen.

Het bedoelde objectief, dat ik heb medegenomen, ten einde het u te laten zien, is niet geheel onbeschadigd. Er is eene cirkelvormige rij putjes in, even alsof eene kleinere lens, die even als deze met een gekartelden metalen rand voorzien was, er op gelegen heeft, en er door een' schok of stoot die kartels op heeft afgezet.

Een oculair was er niet bij; zooals ik elders heb opgemerkt (*Astr. Nachr.* N°. 2277, 28 Augustus 1879), is tot nog toe geen echt »Hugeniaansch oculair" gevonden, daardoor verstaande een negatief oculair, bestaande uit twee lenzen, waarvan de brandpuntsafstanden en de onderlinge afstand tot elkander staan, in reden van 4, 1 en 2. Dit is namelijk de verhouding, zooals men door de constructie vindt, die HUYGENS in de LIV Propositie der Dioptrica mededeelt, en het is ten onrechte, dat men gewoonlijk de verhouding 3, 1 en 2 aan HUYGENS toeschrijft.

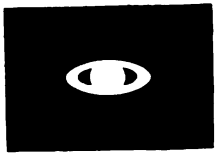
Na deze merkwaardige ontdekking heeft ons geacht medelid BUYS BALLOT, om de werking van het gemelde objectief in een kijker te kunnen onderzoeken, een blikken buis laten maken, van omtrent 10 rijnl. voet lengte, aan wier eene einde het objectief door eene andere buis er overheen, met bajonetsluiting bevestigd wordt, terwijl in het andere einde eene tweede blikken buis geschoven wordt, die voor het opnemen van een of ander oculair moet dienen.

Deze kijker was verder op een houten voet bevestigd, waardoor het mogelijk was, hem op hemellichten te richten, en daarbij eene horizontale en vertikale beweging mede te deelen. Daar er echter veel speling en in het geheel geene klemming aan dien voet was, kostte het buitengewoon veel inspanning, met den kijker op dien voet een hemellicht te beschouwen, want was men eens geslaagd het er in te krijgen, dan verloor men het door de minste beweging weer, en moest men het op nieuw zoeken.

Daarbij kwam dat HUYGENS zelf beschrijft, dat hij, bij de ontdekking van den wachter van Saturnus, slechts een enkelvoudig oculair gebruikte van 3 rijnl. duim brandpuntsafstand. Daar er te Utrecht geene oculairglazen van dien brandpuntsafstand aanwezig waren, verzocht ik den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN, de goedheid te willen hebben, mij de oogbuis, die bij den door KAISER beschreven en Hugeniaanschen kijker van 12 voet behoorde, voor eenigen tijd te willen leenen. Die oogbuis toch bestaat, zoo als uit de beschrijving van KAISER (*Het Instituut*, 1846, blz. 410) blijkt, uit ééne lens van 0,079 M. (d. i. 3 rijnl. duim) en twee lenzen van 0,105 M. (d. i. 4 rijnl. duim) brandpuntsafstand, en er was dus gelegenheid om een kijker samen te stellen, geheel identiek aan den kijker, dien HUYGENS gebruikt heeft.

Nog den vorigen winter heb ik eenige malen getracht met het 3 duims glas als oculair gewapend, dat ik los in de hand moest houden, in de allereerste plaats Saturnus te beschouwen. De vergrooting bedroeg nu 42 maal. Met zeer veel moeite kreeg ik dit gedaan, daar het wegens ondoelmatigheid van den voet bijna onmogelijk was, een hemellicht gedurende eenigen tijd stil in den kijker te houden.

Ik vond, den 9den Januari 1883, met genoemde oogbuis: den ring *even te onderkennen*, even als den wachter. In mijn journaal teekende ik hem dadelijk aldus af. Schaduwen waren niet te zien noch van de planeet op den ring, noch van den ring op de planeet. De dubbelster Mizar, ζ Ursae Maio-



ris, was duidelijk te scheiden, de afstand der samenstellende sterren is bij deze dubbelster omtrent 14″,4.

Ik beproefde nu in plaats van een enkelvoudig oculair, het zwakste negatief oculair van den kijker van STEINHEIL, van de Sterrewacht te Utrecht, te gebruiken, dat een equivalenten brandpuntsafstand van 38^{mm},425 (of 1,42 par. duim) heeft. De vergrooting wordt nu $\frac{3330}{38,425} = 86,6$ maal. Dit gaf, zoo als te verwachten was, eene groote verbetering. De wachter van Saturnus was beter zichtbaar, maar schaduwen waren nu nog niet te zien. Evenmin was de afscheiding van twee ringen zichtbaar, noch ook dat de buitenste rand van den ring donkerder was dan de binnenste.

Van Jupiter was de ééne band, die zich dezen avond alleen vertoonde, even zichtbaar, zijne wachters daarentegen zeer goed.

Beter beviel mij dien avond de nevelvlek van Orion, daar de algemeene vorm van den nevel, zoo als de teekeningen die aangeven, duidelijk te onderkennen was. Van het Trapezium was slechts ééne ster duidelijk, twee andere nauwelijks te onderkennen.

De moeite, verbonden aan het richten van dezen kijker en de nog grootere moeite om een eens gevonden voorwerp in den kijker te houden, noopten mij den kijker liever te laten bevestigen aan den kijker van STEINHEIL, die op een parallatischen voet is opgesteld, en door een uurwerk bewogen wordt, zoodat hij de hemellichten in hunnen schijnbaren dagelijkschen loop volgt.

De Heer OLLAND heeft dit door middel van een paar houten klossen, waarin de kijker van HUYGENS komt te liggen, en een paar zinken banden op eene eenvoudige wijs bewerkstelligd, doch door het ongunstige weer in den herfst van het vorige jaar, en vele bezigheden van anderen aard heb ik eerst dezen winter de gelegenheid gehad, met den aldus ingerichten kijker de hemellichten te beschouwen. Ik gebruikte nu een nog sterker oculair van den kijker van STEINHEIL, dat omtrent 28 mM. brandpuntsafstand heeft,

en dus eene vergrooting van 119 maal verschafte. De resultaten waren echter, wat Jupiter en Saturnus aangaat, nagenoeg dezelfde als met de zwakkere oogbuis. De scheiding der beide ringen van Saturnus was ook met deze vergrooting niet te zien. Het gebrek aan achromatisme van den kijker was duidelijk merkbaar. Saturnus en zijn ring vertoonden gekleurde randen; ik vind aangeteekend: »groenachtig van boven en rood van onderen. Jupiter zeer slecht; 3e wachter op de schijf niet te zien. ter nauwernood een band".

De nevelvlek van Orion kwam mij, zoover mijne herinnering strekte, vrij nauwkeurig zoo voor, als HUYGENS haar in zijn Systema Saturmium afbeeldde, (fig. 1 der bijgevoegde plaat). Ik zag drie sterren van het Trapezium.

Den 24sten Januari j.l. had ik eerst weder gelegenheid den kijker te beproeven. Ik richtte hem op Mars. Als ik hem op zijn scherpst zag, zag ik toch geene vlekken op zijne oppervlakte. Schoof ik de gansche oogbuis een weinig in, dan zag ik den vorm der planeet uitzetten in drie richtingen, die met elkander hoeken van 120° maakten, doch zoodra ik de buis weder uittrok, was de vorm der planeet hersteld.

Omtrent Jupiter en Saturnus verkreeg ik dezelfde resultaten als vroeger.

Den 15den Maart j l. heb ik het laatst den kijker beproefd. Er moest zich toen op de oppervlakte van Jupiter de schaduw van den tweeden wachter vertoonen, maar door den kijker van HUYGENS was hij *niet* zichtbaar. Van Saturnus was van de verdeeling van den ring niets te zien; verder waren noch de schaduw van den ring op de planeet, noch de banden op Saturnus zichtbaar. De band op Jupiter daarentegen was zeer goed te onderscheiden.

Van de nevelvlek van Orion maakte ik eene teekening, die ik later met wit krijt op zwart papier heb overgebracht, (fig. 2 der bijgevoegde plaat). Het merkwaardige van deze teekening is, dat ik in het Trapezium duidelijk alle 4 de sterren kon onderscheiden, even als de nevel, die de twee sterren omgeven, die ten Z.O. en N.N.O. van

het Trapezium op afstanden van ongeveer 8′ afstaan. (G. P. Bond, n⁰. 784 en 734 *)).

Ik zag den grooten inham, (Sinus Magnus) tot zeer nabij het Trapezium zelf, terwijl in het plaatje dat Huygens ervan gegeven heeft, en waarvan fig. 1 der plaat eene kopie voorstelt, hij op een afstand van een paar minuten van het Trapezium afblijft.

Ik merk hier op, dat, ofschoon Huygens, zoo als deze teekening aanduidt, en hij bovendien uitdrukkelijk vermeldt, met zijnen 23voetskijker slechts drie sterren in het Trapezium zag, hij toch later, en wel het eerst den 8sten Januari 1684, de 4de ster er ook bij gezien heeft; tien jaar later, namelijk den 6den Februari 1694, maakte hij van diezelfde nevelvlek, in zijn dagboek, eene teekening met de pen, waarvan wijlen ons medelid Kaiser eene kopie heeft medegedeeld in het 1ste Deel van het Tijdschrift voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, uitgegeven door de 1ste klasse van het Kon. Nederl. Instituut (1848).

Ook in die teekening reikt de donkere Sinus Magnus tot aan het Trapezium.

Bij deze teekeningen heeft Huygens echter zonder twijfel een dubbel-oculair naar zijne eigene vinding gebruikt. Immers het blijkt uit zijn Systema Saturnium, dat deze uitvinding dateert van 1656, althans dat de eerste aanwending van zulk een oculair reeds den 16den Februari van dat jaar schijnt plaats gehad te hebben.

Met het enkele oogglas van 3 rijnl. duim brandpuntsafstand kon ik de grenzen van den geheelen nevel niet goed onderscheiden.

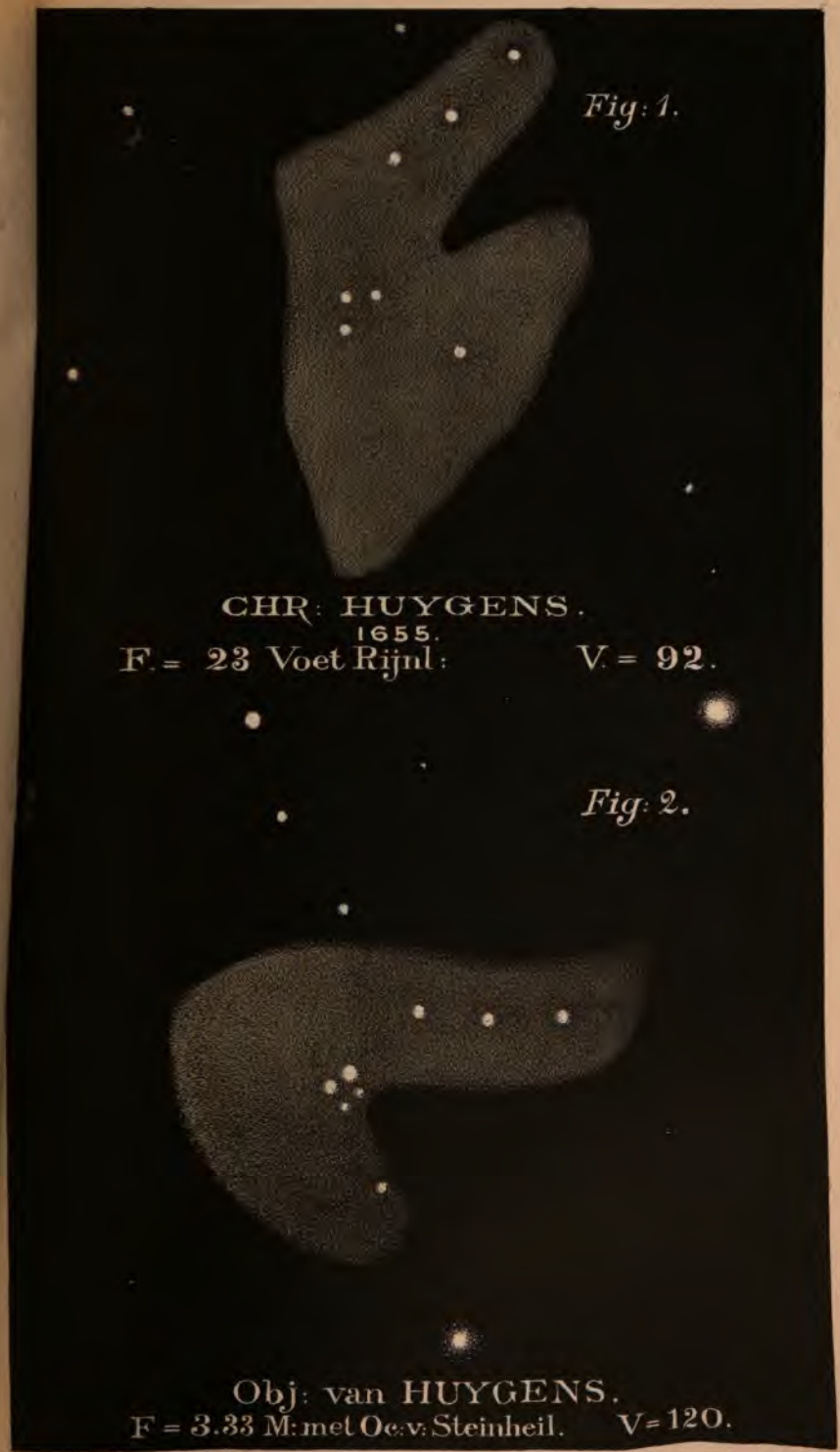
---

*) De door G. P. Bond vervaardigde lijst van sterren, in en bij de nevelvlek van Orion, vindt men in de *Observations upon the great Nebula of Orion*, na zijn dood uitgegeven door Safford, in het 5de Deel der *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College*, Cambridge (Mass.) 1867. Eene latere monographie over het centrale gedeelte van de nevelvlek van Orion, gaf Holden in een aanhangsel tot de *Washington Astronomical Observations* 1878; hierin komt ook eene door H. Draper vervaardigde photographie voor van dit gedeelte, verkregen door eene expositie van 137 minuten.

Maken wij uit een en ander op dat indien HUYGENS krachtiger oculairen gehad had, reeds ditzelfde objectief hem wel zou veroorloofd hebben meer resultaten bij de beschouwing der hemellichten te verkrijgen, toch is het treffend het onderscheid te zien tusschen hetzelfde hemellichaam, beschouwd door den kijker van HUYGENS van 1655, en door dien van STEINHEIL van 1862, beide kijkers van nagenoeg denzelfden brandpuntsafstand.

Utrecht, 28 Maart 1884.

C. OUDEMANS. 10 Voets-kijker van Huygens.



Lith: Gebr: Reimelinger, Amst:

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.,

INGEKOMEN BIJ DE

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

TE AMSTERDAM.

VAN APRIL 1883 TOT EN MET MAART 1884.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1883.

c. Collection des voyages des souverains des Pays-Bas, publiée par GACHARD et PIOT. Bruxelles 1881—1882. Tome III -IV. 4°.

d. Relations politiques des Pays-Bas et de l'Angleterre, sous le règne de Philippe II, publiées par M. le baron KERVIJN DE LETTENHOVE. Bruxelles 1882—1883. Tome I—III. 4°.

e. Table chronologique des chartes et diplômes imprimés concernant l'histoire de la Belgique par ALPH. WAUTERS. Bruxelles 1881. Tome VI. 4°.

Académie royale de Belgique. Compte rendu des séances de la Commission royale d'histoire. Bruxelles 1881—1883. 4e Série. Tome IX. Bull. 1—4. Tome X. Bull. 1—4. Tome XI. Bull. 1—2. 8°.

Documents inédits relatifs à l'histoire du XVIe siècle publiés par M. le baron KERVIJN DE LETTENHOVE. Bruxelles 1883. 1e Partie. 8°.

Ministère de l'Intérieur. Annuaire statistique de Belgique. Bruxelles 1883. Tome XIII. 8°.

Statistique générale de la Belgique. Exposé de la situation du royaume de 1861 à 1875. Bruxelles 1883. Vol. II. Fasc. 12—13. 8°.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1882. Tome XVII. 8°.

Société royale malacologique de Belgique. Procès-Verbaux des séances du 2 Août 1882—2 Juin 1883. 8°.

A. PREUDHOMME DE BORRE. Liste des mantides du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique. Bruxelles 1883. 8°.

Annales du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique. Bruxelles 1883. Tome VIII. folio (avec un atlas de 36 planches).

Inhoud:

L. G. DE KONINCK. Faune du calcaire carbonifère de la Belgique. 4 Partie (Gastéropodes, suite et fin).

Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique. Bruxelles 1883. Tome II. N°. 2. 8°.

L. DOLLO. Note sur les restes de dinosauriens rencontrés dans le crétacé supérieur de la Belgique. 8°. (Extrait du Bulletin du Musée royal d'hist. natur. de Belgique. Tome II).

——— Quatrième note sur les dinosauriens de Bernissart. 8°.
(Extrait du Bulletin du Musée royal d'hist. natur. de Belgique. Tome II).

P. ALBRECHT. Note sur le pelvisternum des édentés (avec des observations morphologiques sur l'appareil sternal des animaux vertébrés). Bruxelles 1883. 8°.
(Extrait du Bulletin de l'Académie royale de Belgique).

——— Epiphyses osseuses sur les apophyses épineuses des vertèbres d'un reptile (Hatteria punctata, Gray). Bruxelles 1883. 8°.

——— Sur les copulae intercostoïdales et les hémisternoïdes du sacrum des mammifères. Bruxelles 1883. 8°.

P. ALBRECHT. Sur la fente maxillaire double sous-mu-

queuse et les 4 os intermaxillaires de l'ornithorynque adulte moral. Bruxelles 1883. 8⁰.

P. Willems. Le droit public romain ou les institutions politiques de Rome depuis l'origine de la ville jusqu'à Justinien. Louvain 1883. 5e Edition. 8⁰.

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen; uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1883. 1ste jaarg. Afl. 12. 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1884. Tome XCVII. N⁰. 21—25. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1883. 2e Série. Tome XII. N⁰. 47—51. 8⁰.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1883. Livr. 299—304. roy. 8⁰.

Nouvelles archives du Muséum d'histoire naturelle. Paris 1883. 2e Série. Tome V. Fasc. 2. 4⁰.

Inhoud:

A. Franchet. Plantae Davidianae ex Sinarum imperio.
A. J. C. Geerts. Notice sur la grande salamandre du Japon.
J. Vesque. De l'anatomie des tissus appliquée à la classification des plantes.
E. et H. Becquerel. Observations de température faite au muséum pendant l'année météorologique 1880—1881.

Journal d'hygiène. Paris 1883. 9e Année. Vol. VIII. N⁰. 375—379. 4⁰.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1883. 6e Année. N0. 11. 8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique, publiée par la Société d'agriculture, sciences et arts de Valenciennes. 1883. Tome XXXVI. N0. 10—11. 8°.

GROOT BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1883. Vol. XLIV. N0. 1. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1883. 2d Series. Vol. III. Part 6. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1883. New Series. Vol. V. N0. 12. 8°.

Transactions of the Clinical Society. London 1882—1883. Vol. XV—XVI. 8°.

Medico-Chirurgical Transactions published by the Royal Medical and Chirurgical Society. London 1882. Vol. LXV. 8°.

Transactions of the Zoological Society. London 1883. Vol. XI. Part. 9. 4°.

Inhoud:

W. K. Parker. On the structure and development of the skull in the crocodilla.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society. London 1883. Part. 3. 8°.

List of the vertebrated animals now or lately living in the gardens of the Zoological Society. London 1883. 8th Edition. 8°.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge 1882. Vol. XIII. Part 2. 4⁰.

Inhoud:

HOMERSHAM COX. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge 1881—1883. Vol. IV. Part 2—5. 8⁰.

Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow. 1882. Vol. XIII. N⁰. 2. 8⁰.

Journal of the Royal Geological Society of Ireland. Dublin 1882. Vol. XVI. Part 2. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Jahrbuch der kais. kön. Geologischen Reichsanstalt. Wien 1882—1883. Band XXXII. N⁰. 4. Band XXXIII. N⁰. 1—3. 4⁰.

Verhandlungen der kais. kön. Zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1883. Band XXXII. 8⁰.

Offenes Schreiben als Antwort auf Herrn baron Osten-Sacken's »critical review" meiner Arbeit über die Notacanthen, von Prof. Dr. FR. BRAUER. Wien 1883. 8⁰.

Mittheilungen der Anthropologischen Gesellschaft. Wien 1882. Neue Folge. Band II. Heft 3—4. 4⁰.

Abhandlungen der kön. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1882. 6te Folge. Band XI. 4⁰.

Inhoud:

F. MENCIK, Konrad Waldhauser, mnich rádu sv. Augustina.

A. Rezek. Pameti o bouri Prazské roku 1524.

C. R. v. Höfler. Monumenta Hispanica. II. Spanische Regesten von 1515—1520.

F. Mencik. Nekolik statutu a narizeni arcibiskupu prazskych Arnosta a Jana I. (1355—1377).

A. Rezek. Nove prispevky kvolbe ceske r. 1526 a. k. pocatkum vlady Ferdinandovy v Zemich korunnich.

J. Velenovsky. Die Flora aus den ausgebrannten Letten von Visovic bei Laun.

A. Grunwald. Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index u. die damit zusammenhängende Logialrechnung.

J. Palacky. Studie o vyvinu rostlinneho roucha zemekoule na zaklade Zemeslovnem I.

S. Gunther. Peter u. Philipp Apian, zwei deutsche Mathematiker u. Kartographen. Beitrag zur Gelehrten-Geschichte des XVI Jahrhunderts.

F. J. Studnicka. Resultate der ombrometrischen Beobachtungen während des Jahres 1881.

L. Celakovsky. Zur Kritik der Ansichten von der Fruchtschuppe der Abietineen.

W. Matzka. Kritische Berechnungen der musikalischen Töne u. der diatonischen Tonleitern.

K. J. Taranek. Monographie der Nebeliden Böhmens. Beitrag zur Kenntniss der Süsswasser—Monothalamien.

Sitzungsberichte der kön. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1882. Jahrg. 1881. 8⁰.

Jahresbericht der kön. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften ausgegeben am. 17 Juni 1881. Prag 1881. 8⁰.

Verhandlungen des Naturforschenden Vereines. Brünn 1882. Band XX. 8⁰.

Bericht der Meteorologischen Commission des Naturforschenden Vereines in Brünn über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1881. Brünn 1882. 8⁰.

Mittheilungen des Historischen Vereins für Steiermark. Graz 1883. Heft 31. 8⁰.

Beiträge zur Kunde Steiermärkischer Geschichtsquellen, herausgegeben vom Historischen Vereine für Steiermark. Graz 1883. Jahrg. 19. 8⁰.

Festrede aus Anlass der sechshundertjährigen Habsburg-Feier der Steiermark gehalten in der Festversammlung des Historischen Vereines am 30 Juni 1883 von Dr. F. Krones, Ritter v. Marchland. Graz 1883. 8⁰.

DUITSCHLAND.

S. Robinski. Zur Kenntniss der Augenlinse und deren Untersuchungsmethoden. Berlin 1883. 8⁰.

Abhandlungen herausgegeben vom Naturwissenschaftlichen Vereine. Bremen 1883. Band VIII. Heft 1. 8⁰.

F. Blass. Dissertatio de Gemino et Posidonio. Kiliae 1883. 4⁰.

——— Einiges aus der Geschichte der Astronomie im Alterthum. Kiel 1883. 8⁰. (Festrede).

F. Brockhaus. Der Einfluss fremder Rechte auf die Entwickelung des deutschen Rechts. Kiel 1883. 8⁰. (Rede bei Antritt des Rectorates).

Chronik der Universität zu Kiel. 1883. 8⁰.

A. Kindt. Beitrag zur Histogenese primärer Lebercarcinome. Kiel 1882. 8⁰.

A. Hildemann. Beitrag zur Casuistik der angeborenen Hemmungsbildungen der Extremitäten. Kiel 1882. 8⁰.

E. Paulsen. Experimentelle Untersuchungen über die Strömung der Luft in der Nasenhöhle. Kiel 1882. 8⁰.

E. Dinkelacker. Ueber acutes Oedem. Kiel 1882. 8⁰.

O. Volbehr. Beitrag zur Kenntniss der Diphtheritis und Tracheotomie. Kiel 1882. 8⁰.

L. Caplick. Ueber diabetes mellitus. Kiel 1882 8⁰.

K. Jürgens. Zur Pathogenese und Casuistik der Gelenkneurosen. Kiel 1882. 8⁰.

C. Hinrichsen. Accommodationskrampf bei Myopie. Kiel 1882. 8⁰.

H. Schütze. Beitrag zur Statistik der Myopie und der Netzhautpunction. Kiel 1882. 8⁰.

W. Pfeiffer. Ueber interstitielle Pneumonie. Kiel 1882. 8⁰.

C. Schröder. Zur Statistik der croupösen Pneumonie. Kiel 1882. 8⁰.

H. Schiel. Zur Statistik der Pneumonie. Kiel 1883. 8⁰.

L. Glaevecke. Ueber die Ausscheidung und Vertheilung des Eisens im thierischen Organismus nach Einspritzung von Eisensalzen. Kiel 1883. 8⁰.

C. Matzdorff. Ueber die Färbung von Idotea tricuspidata Desm. Jena 1882. 8⁰.

C. Pape. Ueber Siliciumpropylverbindungen. Kiel 1882. 8⁰.

F. Höck. Beiträge zur Morphologie, Gruppirung und geographischen Verbreitung der Valerianaceen. Leipzig 1882. 8⁰.

W. Dücker. Beiträge zur Lehre vom Precarium. Altona 1882. 8⁰.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1882. Heft LXXIII—LXXV. roy. 8⁰.

27ster Bericht des Naturhistorischen Vereins. Augsburg 1883. 8⁰.

XVIII, XIX u. XX. Jahresbericht des Vereins für Erdkunde. Dresden 1883. 8⁰.

XXIX und XXX. Bericht des Vereines für Naturkunde. Kassel 1883. 8⁰.

Neues Lausitzisches Magazin, im Auftrage der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben. Görlitz 1883. Band LIX. Heft 1. 8⁰.

Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Stuttgart 1883. Jahrg. 39. 8⁰.

Archiv des Historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. Würzburg 1882. Band XXVI. Heft 1—2. 8⁰.

Fries. Die Geschichte des Bauernkrieges in Ostfranken, herausgegeben von dem Historischen Vereine von Unterfranken und Aschaffenburg. Würzburg 1881. Band II. Lief. 2. 8⁰.

Jahres-Bericht des Historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg für 1881. Würzburg 1882. 8⁰.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Neubrandenburg 1883. Jahr. 36. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1883. N⁰. 154—156. 8⁰.

Publicationen der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1883. N⁰. 17. 4⁰.

Inhoud:

A. Auwers. Mittlere Örter von 83 südlichen Sternen für 1875,0 zur Fortsetzung des Fundamental-Catalogs für die Zonen-Beobachtungen der Astronomischen Gesellschaft, nebst Untersuchungen über die Relationen zwischen einigen neueren Sterncatalogen, insbesondere für den in Europa sichtbaren Theil des südlichen Himmels.

LUXEMBURG.

Recueil des mémoires et des travaux publiés par la Société de botanique du grand duché de Luxembourg. 1874—1880. N⁰. I—V. 3 Dl. 8⁰.

ZWITSERLAND.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle. Genève 1882—1883. Tome XXVIII. 1e Partie. 4⁰.

Inhoud:

W. Meyer. Mémoire sur la grande comète australe du mois de février 1880.

L. De la Rive. Géométrie analytique. Étude sur la projection des angles, courbes sphériques qui déterminent le lieu des plans sur lesquels la projection d'un angle est constante.

P. de Loriol. Description des Echinides des environs de Camerino (Toscane).

W. Meyer. Etude sur la réfraction cométaire.

G. Cellérier. Réfraction cométaire.

H. de Saussure. Note sur le Cervus paludosus (Desm.) et les espèces voisines.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1882. Bern 1882. Heft 1. 8⁰.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Linthal den 11, 12 und 13 September 1882. Glarus 1882. 8⁰.

PORTUGAL.

Boletim da Sociedade de geographia. Lisboa 1883. 4ª Serie. N⁰. 2—3. 8⁰.

Le Brésil à l'exposition international d'Amsterdam 1883. Lisbonne 1882. 4⁰.

RUMENIË.

Annalele Societatei Academice Romane. Bucuresci 1878—1879. Seria 1. Tomu I—XI. 3 Dl. 4⁰.

Annalile Academiei Romane. Bucuresci 1880—1883. Seria 2. Tomu I—IV. Tom. V. Sect. 2. 9 livr. Tomu VII. Sect. 2. 2 Livr. 4⁰.

Documente privitore la istoria romanilor culese de E. de Hurmuzaki publicate sub auspiciile Ministeriu lui Cultelor si al instructiunei publice. Bucuresci 1876—1880. Vol. III—IV. Part 1. (1576—1649) Vol. VI—VII. (1700—1818). 4 Dl. 4⁰.

Psaltirea publicata romanesce la 1577 de Diaconulu Coresi. Edituinea Academiei Romane. Bucuresci 1881. Tomulu I. 4⁰.

Dictionariulu Limbei Romane dupo insareinarea data de Societatea Academica Romana. Bucuresci 1873—1876. Tomu I—II. roy. 8⁰.

Glossariu care coprinde vorbele d'in Limba Romana straine prin origenea sau forma loru, cumu si celle

de origine indouiosa. Dupo insarcinarea data de Societatea Academica Romana. Bucuresci 1871—1876. Fasc. 1—7. 8⁰.

Opurile lui Caiu Corneliu Tacitu, traduse de G. J. Munteanu. Sibiiu 1871. 8⁰.

Operele principelui Demetriu Cantemiru. Bucuresci 1872—1878. Tomu I—V. 8⁰.

T. Cipariu. Gramateca Limbei Romane. Partea 2. Sintetica. Bucuresci 1877. 8⁰.

D. Copacineanu si D. Caianu. Operile lui Caiu Juliu Cesare traduse romanese. Bucuresci 1877. 8⁰.

M. Tulliu Cicerone. Filippicele sau discursurile contra lui M. Antoniu. Traducere de D. A. Laurianu. Bucuresci 1877. 8⁰.

Dione Cassiu (Cocceianu) traducere de A. Demetrescu. Istoria Romana de la Nerone pene la Alexandre Severu DCCCVI—CMLXXXII. Bucuresci 1878. 8⁰.

E. von Hurmuzaki. Fragmente zur Geschichte der Rumänen. Bucuresci 1878—1881. Band I—II. 8⁰

——————— Fragmente din Istoria Romanilor. Bucuresci 1879. Partea 1. 8⁰.

G. Baritiu. Catechismulu Calvinescu inpusu clerului si poporului romanescu sub domnia principiloru G. Rakoczy I. Sibiiu 1879. 8⁰.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie royale de Copenhague 1883. Classe des sciences. 6e Série. Vol. II. N⁰. 4—5. 4⁰.

Inhoud:

4. O. T. Christensen. Bidrag til kundskaben om manganets ilter.
5. L. Lorenz. Farvespredningens theori.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger i aaret 1883. Kjobenhavn 1883. N⁰. 2. 8⁰.

Mémoires de la Société royale des antiquaires du Nord. Copenhague 1883—1884. Nouvelle Série. Année 1882—1884. 8⁰.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie, udgivne af det Kongelige Nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1882. Hefte 4. 1883. Hefte 1. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Upsal 1883. Seriei 3. Vol. XI. Fasc. 2. 4⁰.

Inhoud:

H. Almkvist. Die Bischari-Sprache Tu Bedāwie in Nordost-Afrika, beschreibend und vergleichend dargestellt. 2.
A. Berger. Sur une application des nombres des classes des formes quadratiques binaires pour un déterminant négatif.
F. Fullberg. Bau und Entwickelung der Barten bei Balaenoptera Sibbaldii.
E. Pfannenstiel. Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1883. 7e Série. Tome XXXI. N⁰. 2—4. 4⁰.

Inhoud:

2. L. Struve. Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen.
3. E. Catalan. Recherches sur la constante G, et sur les intégrales Eulériennes.
4. A. Lindstedt. Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1883. Tome XXVIII. N⁰. 4. 4⁰.

Verslagen van het Keiz. Aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1883. Deel XIX. N⁰. 3. 8⁰. (In het Russisch).

Nouveaux mémoires de la Société impériale des naturalistes de Moscou. 1883. Tome XIV. Livr. 4. 4⁰.

Inhoud:

K. Weihrauch. Ueber die gegenseitige Einwirkung permanenter Magnete.

Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou. 1882—1883. Année 1882. N⁰. 2—4. Année 1883. N⁰. 1. 8⁰.

Acta Societas scientiarum Fennicae. Helsingforsiae 1883. Tomus XII. 4⁰.

Inhoud:

O. M. Reuter. Etudes sur les collemboles.
F. Elfving. Beitrag zur Kenntniss der physiologischen Einwirkung der Schwerkraft auf die Pflanzen.
G. Mittag-Leffler. Integration af en ny klas af lineera differentialeqvationer af andra ordningen met dubbelperiodiska koefficienter och integraler, som i allmänhet icke äro entydiga funktioner af den oberoende variabeln.
Ch. Hermite. Sur quelques points de la théorie des fonctions.

E. Bonsdorff. Nagra antalbestämningar för tangenter på en yta och ett enkelt system af ytor.

J. K. Qvigstad. Beiträge zur Vergleichung des verwandten Wortvorrathes der lappischen und der finnischen Sprache.

F. Gustafsson. Fragmenta veteris testamenti in latinum conversi e palimpsesto vaticani eruta.

O. M. Reuter. Ad cognitionem reduviidarum mundi antiqui.

H. Poincaré Sur les fonctions à espaces lacunaires.

A. F. Sundell. Bemerkungen über absolute Maass-Systeme in der Physik.

——— Om principen för de virtuela hastigheterna och dermed sammanhängande frägor i mekanniken.

G. Mittag-Leffler. On integrationen af de Hermitéska differentialeqvationerna af tredje och fjerde ordningen, vid hvilka integralernas oändlighetsställen äro af ordningen 1.

Ch. Hermite. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions.

——— Sur la fonction $Sn^a x$.

Th. Homen. Analytisk framställning of några lakunära funktioner.

M. Buch. Die Wotjäken, eine ethnologische Studie.

G. Borenius. En metod för upplösningen af likheter af fjerde graden.

O. M. Reuter. Monographia generis Oncocephalus Klug proximeque affinium.

Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. Helsingfors 1882. Tomus XXIV. 8⁰.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk; utgifna af Finska Vetenskaps Societeten. Helsingfors 1882. Häftet 36—37. 8⁰.

Observations météorologiques publiées par la Société des sciences de Finlande. Helsingfors 1883. Vol. VIII. 8⁰.

K. E. F. Ignatius. Le grand duché de Finlande. Notice statistique. Helsingfors 1878. 8⁰.

AMERIKA.

Index-Catalogue of the library of the Surgeon-Gene-

ral's Office, United States Army. Washington 1883. Vol. IV. 4⁰.

Smithsonian miscellaneous collections. Washington 1882—1883. Vol. XXII—XXVII. 8⁰.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution, showing the operations for the year 1881. Washington 1883. 8⁰.

Johns Hopkins University circulars. Baltimore 1883. Vol. III. N⁰. 27. 4⁰.

Journal of the American Medical Association. Chicago 1883. Vol. I. N⁰. 18—21. 4⁰.

Science. Cambridge 1883. Vol. II. 41—44. 8⁰.

Scientific proceedings of the Ohio Mechanics Institute. Cincinnati 1883. Vol. II. N⁰. 3. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1883. Tomo VIII. N⁰. 119—133. fol.

Revista mensual climatologica. Mexico 1882. Tomo II. N⁰. 17. 4⁰.

El Ensayo Medico. Caracas 1883. Ano I. N⁰. 7—8. 4⁰.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1883. N⁰. 9. 4⁰.

Actas de la Academia Nacional de ciencias en Cordoba. Buenos-Aires 1882. Tomo IV. Entr. 1. 4⁰.

Inhoud:

J. Hieronymus. Monografia de Lilaea Subulata.

Informe oficial de la Comision cientifica agregada al

estado mayor general de la expedicion al Rio Negro (Patagonia) realizada en los meses de Abril, Mayo y Junio de 1879, bajo las ordenes del general D. Julio A. Roca. Buenos-Aires 1881. Entr. 1—3. (Zoologia, botanica y geologia). 4⁰.

Boletin de la Academia Nacional de ciencias en Cordoba. Buenos-Aires 1883. Tomo V. Entr. 1—2. 8⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1883. Tomo XVI. Entr. 5. 8⁰.

AUSTRALIË.

Catalogue of the Public Library of Victoria. Melbourne 1880. Vol. I—II. 4⁰.

F. von Mueller. Observations on new vegetable fossils of the auriferous drifts. Melbourne 1883. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1883. Nieuwe Serie. 10de Jaarg. N⁰. 10. 8⁰.

Journal des savants. Paris, Novembre 1883. 4⁰.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1883. 2e Série. Tome VII. Septembre—Novembre. 8⁰.

Annales de chimie et de physique. Paris 1883. 5e Série. Tome XXX. Octobre. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1883. 5th Series. Vol. XVI. N°. 102. 8°.

Annals and magazine of natural history. London 1883. 5th Series. Vol. XII. N°. 72. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. St. 46—50. Nachrichten N°. 11. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1883. Neue Folge. Band XX. Heft 4. Beiblätter. Band VII. St. 11. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1883. Band CCL. Heft 7—11. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1883. 3e Période. Tome XX. N°. 59. 8°.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1883. 3e Période. Tome X. N°. 11. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1884.

NEDERLAND.

Jaarboek van het mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië, uitgegeven op last van Zijne Excellentie den Minister van Koloniën. Amsterdam 1883. 12de Jaarg. 2de gedeelte. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1883. 4de Reeks. Deel VII. N°. 11—12. 8°.

Flora Batava. Leiden 1883. Afl. 263—264. 4°.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden, in het tijdvak van den 19den September 1882 tot den 18den September 1883, uitgebracht door H. G. van de Sande Bakhuijzen. Leiden 1883. 8°.

Buys Ballot. Klimatologie van onze koloniën en aardmagnetisme. Leiden 1883. 8°.

Th. Houtsma. Ibn-Wadhih qui dicitur Al-Iacqubi, Historiae. Lugdini Bat. 1883. 2 Vol. 8°.

Verslag over het voorgevallene tijdens het hooge opperwater op de Nederlandsche rivieren in den winter van 1882 op 1883. 's Gravenhage 1883. 4°.

Sepp's Nederlandsche insecten. 's Gravenhage 1883. 2de Serie. Deel IV. N°. 23—24. 4°.

Benedicti de Spinoza opera quotquot reperta sunt. Recognoverunt J. van Vloten et J. P. N. Land. Hagae Com. 1883. Vol. II. 4°.

L. A. J. W. baron Sloet. De heilige Ontkommer of Wilgeforthis. 's Gravenhage 1884. 8°.

Mededeelingen betreffende het zeewezen. 's Gravenhage 1884. Deel XXV. Afl. 1. 8°.
(Uitgegeven door het Departement van Marine).

A. W. P. Verkerk Pistorius en Mr. P. A. van der Lith. De grondslagen van het Britsch-Indisch beheer. 's Gravenhage 1876. 8⁰.

——————————— Ceylon. Indische volksbelangen. 's Gravenhage 1874. 8⁰.

——————————— Studiën over de inlandsche huishouding in de Padangsche bovenlanden. Zalt. Bommel 1871. 8⁰.

Archief. Vroegere en latere mededeelingen voornamelijk in betrekking tot Zeeland, uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen. Middelburg 1883. Deel V. St. 3. 8⁰.

Catalogus der Bibliotheek van het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen. Middelburg 1883. 2de Druk. Stuk 2. 8⁰.

De Vrije Fries. Mengelingen uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1883. 3de Reeks. Deel IV. Afl. 1. 8⁰.

25ste Verslag der handelingen van het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde te Leeuwarden, over het jaar 1882—1883. 8⁰.

W. B. S. Boeles. De patriot J. H. Swildens, publicist te Amsterdam, daarna Hoogleeraar te Franeker. Leeuwarden 1884. 8⁰.

B. D. H. Tellegen. Jhr. Mr. Marinus Willem de Jonge van Campensnieuwland. z. j. 8⁰.
(Overgedrukt uit »de Nederlandsche Spectator" 1883).

Statistiek van het Koninkrijk der Nederlanden. Staten

van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand November 1883. 's Gravenhage 1883. Nieuwe Serie. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Geneeskundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1883. Deel XXIII. Afl. 5. 8⁰.

Minhâdj at-talibin. Le guide des zélés croyants. Manuel de jurisprudence Musulmane selon le rite de Chafi'i. Texte Arabe, publié par ordre du gouvernement avec traduction et annotations par L. W. C. van den Berg. Batavia 1883. Vol. II. roy. 8⁰.

J. A. C. Oudemans. Verslag omtrent de bepaling door middel van de electrische telegraaf van het lengteverschil tusschen Madras en Singapore, uitgevoerd in 1871, en de daaruit afgeleide lengte van Batavia. 8⁰. (Overgedrukt uit het Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Deel XLIII).

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1883. 3e Série. Tome VI. N⁰. 11. 8⁰.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1883. 3e Série. Tome XVII. N⁰. 11—12. 8⁰.

F. Plateau. Recherches sur la force absolue des muscles des invertébrés. 1e Partie. Force absolue des muscles

adducteurs des mollusques lamellibranches. Bruxelles 1883. 8⁰.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 3e Série. Tome VI).

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen, uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1884. 2de Jaarg. Afl. 1. 8⁰.

Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1883. Deel XXXIII. 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1883—1884. Tome XCVII. N⁰. 26—27. Tome XCVIII. N⁰. 1—2. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1883—1884. 2e Série. Tome XII. N⁰. 52. Tome XIII. N⁰. 1—3. 8⁰.

Académie de médecine. Avis sur les dangers de l'abus des boissons alcooliques. Paris. s. a. Plano.

Ch. Baltet. De l'action du froid sur les végétaux pendant l'hiver 1879—80. Ses effets dans les jardins, les pépinières, les parcs, les forêts et les vignes, avec la nomenclature des arbres et des arbustes qui ont succombé ou résisté à la gelée. Paris 1882. 8⁰.

J. P. Six. Du classement des séries cypriotes. Paris 1883. 8⁰.
(Extrait de la Revue Numismatique 1883).

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1884. Livr. 305—308. roy. 8⁰.

Journal d'hygiène. Paris 1884. 10e Année. Vol. IX. N°. 380—383. 4°.

V. Bouton. Wapenboek ou Armorial de 1334 a 1372 contenant les noms et armes des princes chrétiens, ecclésiastiques et séculiers suivis de leurs feudataires selon la constitution de l'Europe et particulièrement de l'empire d'Allemagne conformément à l'édit de 1356, appelé la Bulle d'Or, précédé de poésies héraldiques par Gelre, héraut d'Armes. Paris—Bruxelles 1881—1884. Tome I, III. 4°.

GROOT BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1884. Vol. XLIV. N°. 2. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1884. New Series. Vol. VI. N°. 1. 8°.

DUITSCHLAND.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1883. Band XCIV. Heft 3. 8°.

Bericht über die Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft 1882—1883. Frankfurt a./M. 1883. 8°.

60ster Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1883. 8°.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1883. Theil LX. Heft 3. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1884. Jahrg. 7. N°. 157—158. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1883. Band XXIX. N⁰. 11. 4⁰.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1883. Serie 3. Transunti. Vol. VII. Fasc. 15—16 Vol. VIII. Fasc. 1. 4⁰.

D. Bierens de Haan. Bibliographie Néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16ᵉ, 17ᵉ et 18ᵉ siècles sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications. Rome 1883. 4⁰.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1883. Band IV. Heft 4. 8⁰.

PORTUGAL.

Noticia geral sobre a situaçao geographico, populaçao, clima e serviço sanitario das provincias ultramarinas Portuguezas. Lisboa 1883. 4⁰.

Estatistica medica dos hospitaes das provincias ultramarinas referida ao anno de 1869 a 1881. Lisboa 1874—1883. 11 Deelen. 4⁰.

Questôes medico-coloniaes. Acclimaçao dos Europas nos climas quentes immunidada da raça Ethiope contra as febres palustres a tisica pulmonar nos paizes quentes a febre typhoide nos climas paludosos typo das febres intermittentes febres telluricas o sulphato de quinina como preservatio das febres paludosas Lisboa 1883. 8⁰.

J. B. de Oliveira. Breves apontamentos sobre hygiene e pathologia da provincia de Angola. Lisboa 1883. 8⁰.

Do clima e das doenças da provincia de Moçambique comprehendo diversas noticias sobre a topographia, meteorologia, pathologia e therapeutica. Lisboa 1883. 8⁰.

J. C. de Lacerda. Noticias sobre febres paludosas e sobre uma epidemia de febre typhoide observadas na provincia de Cabo Verde (1867 a 1870). Lisboa 1883. 8⁰.

F. F. Hopffer. Noticia sobre algumas aguas mineraes da Ilha de Santo Antão (Archipelago de Cabo Verde). Lisboa 1883. 8⁰.

Relatorio acerca do estado da cultura das arvores de quina da Ilha de Santo Antão (Analyse chimica das mesmas quinas). Lisboa 1883. 8⁰.

Regulamento geral de sanidade maritima mandado observar por decreto de 12 de Novembro de 1874. Lisboa 1874. 8⁰.

Regulamento da escola medico-chirurgica de Nova Goa. Lisboa 1883. 8⁰.

Reorganisação do serviço de saude das provincias ultramarinas numero de facultativos e de pharmaceuticos que compoem cada un dos quadros de saude e seus vencimentos. Lisboa 1883. 8⁰.

Organisação das companhias de saude das provincias ultramarinas. Lisboa 1883. 8⁰.

Emolumentos sanitarios que devem pagar os navios que entrarem nos portos das provincias ultramarinas. Lisboa 1883. 8⁰.

Noticia sobre os medicamentos Chinezes comprehendidos em os Nos. 73 a 77 do catalogo segundo a traducção feita pelo interprete sinologo de Macau. Lisboa 1883. 8⁰.

Varias informações sobre a construcção dos hospitaes designado no catalogo com os Nos. 79 à 83. Lisboa 1883. 4⁰.

RUSLAND.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1883. Tome XXIX. N⁰. 1. 4⁰.

Verslagen van het keiz. Aardrijkskundig genootschap. St. Petersburg 1883. Deel XIX. N⁰. 4. 8⁰. (In het Russisch).

Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums in den Jahren 1881—1882. Tiflis 1883. 4⁰.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jahre 1882. Tiflis 1883. 4⁰.

RUMENIË.

Analele Academiei Romane. Bucuresci 1883. Seria II. Tom. VII. Sect. 2. 4⁰.

Inhoud:

E. Bacaloglo. Espositiunea de la München din anulu 1882.

Melchisedecu. Despre iconele miraculose de la Athon de proveninta Romana.

G. Baritiu. Raportu asupra caletoriei la ruinele sarmisagetusei si a informatiuniloru adunate la fata locului, in anulu 1882.

J. Felix. Dare de sema asupra congresului alu patrulea internationalu de igeana tinutu la Gfneva in luna Septembrie 1882.

J. Felix. Prophylaxia pelagrei.
G. Saulescu. Manunchiu din manuscrisele.
V. A. Urechia. Vieta si operele lui Petru Maioru.

A Z I Ë.

Registers of original observations in 1883, reduced and corrected at six places in India. March--May 1883. fol.

A M E R I K A.

Annual report of the surgeon general United States Army. 1883. 8⁰.

Science. Cambridge 1883. Vol. II. N⁰. 45—48. 8⁰.

Journal of the American Medical Association. Chicago 1883. Vol. I. N⁰. 22—25. 4⁰.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1883. Vol. I. Fasc. 5. 8⁰.

El Ensayo Medico. Caracas 1883. Ano 1. N⁰. 9—10. 4⁰.

Boletin de la Academia Nacional de ciencias en Cordoba. Buenos-Aires 1883. Tomo V. Entr. 4. 8⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1883. Tomo XVI. Entr. 6. 8⁰.

A U S T R A L I Ë.

Annual report of the department of mines, New South Wales, for the year 1882. Sydney 1883. fol.

F. von Mueller. The plants indigenous around Sharks Bay and its vicinity. Perth 1883. fol.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1883. Nieuwe Serie. Jaarg. 16. N⁰. 11. 8⁰.

Bibliotheca Belgica. Livr. 42—44. 8⁰.

Journal des savants. Paris, Décembre 1883. 4⁰.

Annales des sciences naturelles. 6e Série. Botanique. Paris 1883. Tome XV. N⁰. 5—6. Tome XVI. N⁰. 6. 8⁰.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1883. 5th Series. Vol. XVII. N⁰. 103. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1883. 5th Series. Vol. XIII. N⁰. 73. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1883. N⁰. 51—52. 1884. N⁰. 1. Nachrichten 1883. N⁰. 13. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1883—1884. Neue Folge. Band XX. Heft 5. Band XXI. Heft 1. Beiblätter. Band VII. St. 12. 8⁰.

Allgemeine Deutsche Biographie. Leipzig 1883. Band XVIII. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1883. Band CCL. Heft 12—13. Band CCLI. Heft 1—3. 8⁰.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1883. 3e Période. Tome X. N⁰. 12. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND FEBRUARI 1884.

NEDERLAND.

Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam 1884. Deel X. St. 2. 8⁰.

Catalogus van de Bibliotheken der Maatschappij tot bevordering der toonkunst en der Vereeniging voor Noord-Nederlands muziekgeschiedenis. Amsterdam 1884. 8⁰.

De Volksvlijt. Tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1883. N⁰. 9—10. 8⁰.

J. G. Frederiks. Joannes Six van Chandelier. Z. j. 8⁰. (Overgedr. uit het Tijdschr. v. Ned. Taal- en Letterk. 1883).

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1884. 4de Reeks. Deel VIII. N⁰. 1. 8⁰.

Supplement op den Catalogus der Nieuwe Bibliotheek, behoorende tot het Stedelijk Museum te Alkmaar. 1884. 8⁰.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1883. Tome II. N⁰. 1—8. 8⁰.

J. G. de Man. Die, frei in der reinen Erde und im süssen Wasser lebenden Nematoden der Niederländischen Fauna. Leiden 1884. gr. 4⁰.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 1883—1884. 's Gravenhage 1884. 2de Afl. 1ste en 2de Gedeelte. 4°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche Entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1884. Deel XXVII. Afl. 1. 8°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het Koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1884. 4e Reeks. Deel VIII. St. 1. 8°.

B. F. Matthes. Makassaarsche Chrestomathie. 's Gravenhage 1883. 2de Uitgave. 8°.

Verslagen omtrent 's Rijks oude archieven. V. 1882 's Gravenhage 1883. 8°.

Handelingen van het Provinciaal Genootschap van kunsten en wetenschappen in Noord-Brabant, over de jaren 1882 en 1883. 's Hertogenbosch 1882—1883. 8°.

Verzamelingstabellen der waterhoogten langs de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maanden Mei en Juni 1883. 's Gravenhage 1883. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Juli 1883. 's Gravenhage 1883. fol.

BELGIË.

Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1884. 50e Année. 8°.

Coutumes du pays et comté de Hainaut. Introduction par Ch. Faider. Bruxelles 1883. 4⁰.

Coutumes du pays et comté de Flandre. Coutume du bourg de Bruges par L. Gilliodts-van Severen. Bruxelles 1883. Tome II. 4⁰.

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen, uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1884. 2de Jaarg. Afl. 2. 8⁰.

C. Ubaghs. La machoire de la Chelonia Hoffmanni de la craie supérieure de Maestricht. Liége 1883. 8⁰. (Extrait des Annales de la Société geol. de Belg. Tome X).

——— Mollusques terrestres et fluviatiles des environs de Maastricht. Bruxelles 1883. 8⁰. (Extrait des Bulletins de la Société roy. malac. de Belgique. Tome XVIII).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1884. Tome XCVIII. N⁰. 3—6. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1884. 2e Série. Tome XIII. N⁰. 4—7. 8⁰.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1883. Tome XI. N⁰. 5. 8⁰.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1883. 6e Année. N⁰. 12. 8⁰.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1884. Livr. 309—312. roy. 8⁰.

Journal d'hygiène. Paris 1884. 10e Année. Vol. IX. N°. 384—387. 4°.

L'art de vérifier les dates des faits historiques, des chartes, des chroniques et autres anciens monumens, depuis la naissance de Notre-Seigneur. Paris 1783—1787. 3e Edition. Par un réligieux bénédictin de la congrégation de S. Maur. Tome I—III. fol.

L'art de vérifier les dates, depuis l'année 1700 jusqu'à nos jours, rédigée par une Société de savants et hommes de lettres, formant la continuation de l'ouvrage publié sous ce nom par les réligieux bénedictins de la congrégation de St. Maur. Paris 1821—1838. Tome I—IV. fol.

L'art de vérifier les dates des faits historiques, des inscriptions, des chroniques, et autres anciens monumens, avant l'ère chrétienne. Paris 1820. I Vol. fol.

Collection universelle des mémoires particuliers relatifs à l'histoire de France. Londres-Paris 1785—1790. Tome I—LX. 8°.

Petitot. Collection des mémoires relatifs à l'histoire de France. Paris 1821—1829. 1e Série. Tome I—LII. 2e Série. Tome I—LXXIII. 8°.

——— Mémoires du cardinal de Richelieu sur le règne de Louis XIII, depuis 1610 jusqu'à 1638. Paris 1823. Tome I—X. 8°.

J. M. Quérard. La France littéraire ou dictionnaire bibliographique des savants, historiens et gens de lettres de la France, ainsi que des littérateurs étangers qui ont écrit en Français, plus particulièrement pen-

dant les 18c et 19e Siécles. Paris 1827—1839. Tome I—X. 8⁰.

J. M. Quérard et F. Bourquelot. La littérature Française contemporaine 1827—1849; continuation de la France littéraire. Paris 1840—1857. Tome I—VI. 8⁰.

Catalogue de la Bibliothèque de la ville de Lille. Lille 1839—1879. 9 Volumes. 8⁰.

Cartulaire de l'abbaye de Saint Bertin publié par Quérard et appendice par F. Morand. Paris 1840—1867. 2 Volumes. 4⁰.

Armand. Histoire de Saint Remi précédée d'une introduction et suivie d'un aperçu historique sur la ville et l'église de Reims. Paris-Lyon 1846. 8⁰. Avec un Atlas. Plano.

A. Sicard. Monographie de la canne à sucre de la Chine dite sorgho à sucre. Paris 1858. 2e Edition. Tome I—II. 8⁰.

V. Cousin. Petri Abaelardi Opera. Parisiis 1859. Tomus I—II. 4⁰.

E. Aubert. La Vallée d'Aoste. Paris 1860. 4⁰.

Archives diplomatiques. Recueil de diplomatie et d'histoire. Paris 1861—1879. Années 1861—1879. 62 Tomes. 8⁰.

A. Teulet. Relations politiques de la France et de l'Espagne avec l'Ecosse au XVIe siècle; papiers d'état, pièces et documents inédits ou peu connus tirés des bibliothèques et des archives de France. Paris 1862. Tome I—V. 8⁰.

Procli philosophi Platonici opera inedita quae primus olim e codd. Mss. Parisinis italicisque vulgaverat nunc secundis curis emendavit et auxit VICTOR COUSIN. Parisiis 1864. 4⁰.

A. LEFEBVRE. Histoire des cabinets de l'Europe pendant le consulat et l'empire (1800—1815). Paris 1866—1869. 2e Edition. Tome 1—V. 8⁰.

V. PLACE. Ninive et l'Assyrie. Paris 1865—1867. 3 Vol. fol.

E. HATIN. Bibliographie historique et critique de la presse périodique francaise ou cataloque systèmatique et raisonné de tous les écrits périodiques de quelque valeur publiés ou ayant circulé en France. Paris 1866. 8⁰.

A. LENOIR. Statistique monumentale de Paris. Paris 1867. Explication des planches. 4⁰. Atlas des cartes, plans et dessins. 36 Livraisons. Plano.

Chefs d'oeuvre de l'art antique tirés principalement du Musée royal de Naples. 1e Série. Monuments de la vie des anciens. Texte par M. ROBIOU. Tome I—III. 2e Série. Monuments de la peinture et de la sculpture. Texte par M. F. LENORMANT. Tome I—IV. Paris 1867. 4⁰.

Mission scientifique au Mexique et dans l'Amérique centrale. Linguistique. Manuscrit Troano. Etudes sur le système graphique et la langue des Mayas par M. BRASSEUR DE BOURBOURG. Paris 1869—1870. Tome I—II. 4⁰.

J. M. QUÉRARD. Les superchéries littéraires dévoilées. Paris 1869—1871. 2e Edition. Tome I—III. 8⁰.

A. A. Barbier. Dictionnaire des ouvrages anonymes. Suite de la 2e Edition des Superchéries littéraires dévoilées par J. M. Quérard. Paris 1872—1878. Tome I—IV. 8⁰.

Cl. Devic et J. Vaissette. Histoire générale de Languedoc avec des notes et les pièces justificatives. Toulouse 1872—1879. Tome I—VIII, XIII—XIV. 4⁰. (Les tomes IX à XII n'ont pas encore paru).

E. Rivière. Découverte d'un squelette humain de l'époque paléolithique dans les cavernes des Baoussé-Roussé dites Grottes de Menton. Paris 1873. 2e Edition. 4⁰.

Mélanges historiques. Tables chronologique et alphabétique des quatre volumes publiés de 1841 à 1848. Paris 1874. 4⁰.

Bouillon. Musée des antiques. Choix des plus belles statues, bas-reliefs etc. Paris 1874. fol.

G. Pouchet. Mémoires sur le grand fourmilier (Myrmecophaga jubata, Linné). Paris 1874. 4⁰.

L. Paris. Les papiers de Noailles de la bibliothèque du Louvre. Paris 1875. Tome I—II. 8⁰.

Exposition universelle de Vienne en 1873. France. Commission supérieure. Rapports. Paris 1875. Tome I—V. 4⁰.

E. Petitot. Vocabulaire Français-Esquimau. Dialecte des Tchiglit des bouches du Mackenzie et de l'Anderson précédé d'une monographie de cette tribu et de notes grammaticales. Paris 1876. 4⁰.

L. A. Bourgault-Decoudray. Etudes sur la musique ecclésiastique Grecque. Paris 1877. 8⁰.

G. Bouchon-Brandely. Traité de pisciculture pratique et d'aquiculture en France et dans les pays voisins. Paris 1876. 8⁰.

C. Dareste. Recherches sur la production artificielle des monstruosités ou essais de tératogénie expérimentale. Paris 1877. 8⁰.

P. Lorain. Etudes de médecine clinique faites avec l'aide de la méthode graphique et des appareils enregistreurs. Paris 1877. Tome I—II. 8⁰.

F. G. Lemercier. Anatomie iconographique stratifiée. Structure de la dent humaine. Paris 1877. fol.

Rapport à M. le Ministre de l'instruction publique sur la mission des Chotts. Etudes relatives au projet de mer intérieure par le capitaine Roudaire. Paris 1877. 2e Edition. Augmenté des rapports de l'Académie des sciences. 8⁰.

Rapports sur les travaux géodésiques et topographiques exécutés en Algérie et sur un projet de mer intérieure à exécuter au sud de l'Algérie et de la Tunisie présenté par M. Roudaire. (1877). 4⁰.

L. Courajod. Le monasticon Gallicanum. Paris 1879. 7 Fasc. folio.

C. Leberthais et L. Paris. Toiles peintes et tapisseries de la ville de Reims ou la mise en scène du théatre des confrères de la passion. Paris 1880. 2 Vol. 4⁰. et Atlas. Plano.

Dictionnaire-Pongoué-Français précéde des principes de la langue Pongouée. Paris 1881. 8⁰.

Monographie de la cathédrale de Chartes. Paris 1842—1865. Atlas de 9 Livr. Plano. Explication des planches. Paris 1881. 4⁰.

MICHAUD et POUJOULAT. Nouvelle collection des mémoires relatifs à l'histoire de France depuis le 13e siècle jusqu'à la fin du 18e Siècle. Paris 1881. Tome I—XXXIV. 8⁰.

Musée Napoleon III. — Choix de monuments antiques pour servir à l'histoire de l'art en Orient et en Occident. Texte explicatif par A. DE LONGPÉRIER. Paris 1882. fol.

Enquêtes relatives à l'enseignement supérieur. Paris 1883. Tome I—VII. 8⁰.

GROOT BRITTANNIE EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society. London 1883. Vol. XXXV. N⁰. 226. 8⁰.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. London 1883. Vol. XLVII. 4⁰.

Inhoud.

C. PRITCHARD. On the moons photographic diameter, and on the applicability of cellestial photography to accurate measurement.

R. L. J. ELLERY. Observations of the transit of Venus, 1874, December 8—9, Colony of Victoria, Australia.

H. C. RUSSELL. Observations of the transit of Venus, 1874, December 8—9, made at stations in New South Wales.

J. TEBBUTT. Observations of the transit of Venus, 1874, December 8—9, made at Windsor, New South Wales.

CH. TODD. Observations of the transit of Venus, 1874, December 8—9, at Adelaide, South Australia.

A. C. BIGG-WITHER. Observations of the transit of Venus, 1874, December 8—9, as observed at Mooltan, Punjab, India.

E. J. STONE. Observations of the transit of Venus, 1874, December 8, made at the Cape of Good Hope.

H. C. RUSSELL. Measures of Sir John Herschel's Cape stars, together with a list of new double star.

H. W. BURNHAM. Double-star observations made in 1879 and 1880 with the 18½ inch refractor of the Dearborn Observatory, Chicago, U. S.

W. E. PLUMMER. On the solar motion in space.

C. PRITCHARD. Photometric determination of the relative brightness of the brighter stars north of the equator.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1884. Vol. XLIV. N⁰. 3. 8⁰.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1884. New Series. Vol. VI. N⁰. 2. 8⁰.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1884. 2d Series. Vol. IV. Part 1. 8⁰.

Journal of the Royal Asiatic Society of Great-Britain and Ireland. London 1884. New Series. Vol. XVI. Part. 1. 8⁰.

Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1884. Vol. XIII. N⁰. 3. 8⁰.

Catalogue of oriental coins in the British Museum. Vol. VIII. (The coins of the Turks in the British Museum). London 1883. 8⁰.

R. A. PEACOCK. Saturated steam, the motive power in volcanoes and earthquakes. London 1882—1883. 2d Edition. With Supplement. 8⁰.

Geo. C. Haité. Plant studies for artists, designers and art-students. London 1883. Part. 1. fol.

OOSTENRIJK.

Mittheilungen der Anthropologischen Gesellschaft. Wien 1882—1883. Band XII. Heft 3—4. Band XIII. Heft 3—4. 4⁰.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbruck 1883. 3te Folge. Heft 27. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den Deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1884. Jahrg. 1882. Heft 10—12. 4⁰. Obl.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1884. Band XCV. Heft 1. 8⁰.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1883. Band XII. N⁰. 9. 4⁰.

Inhoud:

W. G. Hänkel. Elektrische Untersuchungen. 17te Abhandlung.

Berichte über die Verhandlungen der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1883. Mathematisch-physische Classe 1882. Band XXXIV. 8⁰.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1883. Band VIII. N⁰. 5—6. Band IX. N⁰. 1. 4⁰.

Inhoud, Band VIII:

5. Th. Schreiber. Die Athena Parthenos des Phidias und ihre Nachbildungen.
6. M. Heinze. Der Eudämonismus in der Griechischen Philosophie. 1ste Abhandlung Vorsokratiker, Demokrit, Sokrates.

Band IX, N°. 1:

O. Ribbeck. Kolax. Eine ethologische Studie.

Berichte über die Verhandlungen der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1883. Philologisch-historische Classe 1882. Band XXXIV. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1884. 7te Jahrg. N°. 159—160. 8°.

Wochenschrift für klassische Philologie, herausgegeben von W. Hirschfelder. Leipzig 1884. Jahrg. 1. N°. 1—12. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1883—1884. Band XXIX. N°. 12. Band XXX. N°. 1. 4°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des Naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1883. 4te Folge. Band II. Heft 5. 8°.

4ter Bericht der Zentral-Kommission für wissenschaftliche Landeskunde von Deutschland. München 1884. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1883. Heft 3. 8°.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung, herausgegeben von der kön. bayer. botanischen Gesellschaft. Regensburg 1883. Neue Reihe. Jahrg. 41. 8°.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Wiesbaden 1883. Jahrg. 36. 8°.

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société Vaudoise des sciences naturelles. Lausanne 1883. 2e Série. Vol. XIX. N°. 89. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. 1883—1884. Serie 3. Transunti. Vol. VIII. Fasc. 2—3. 4°.

Relazione della commissione per le prescrizioni edilizie dell' isola d'Ischia istituita dal Ministro dei lavori pubblici dopo il terremoto del Luglio 1883. Roma 1883. 8°.

Opere di Luigi Rossini. Roma 1829—1850. Tomo I—X. Plano.

Tomo I:

Le antichita Romane ossia raccolta delle piu interessanti vedute di Roma antica.

Tomo II:

Scenografia degl'interni delle piu belle chiese basiliche antiche di Roma.

Tomo III:

Le antichita dei contorni di Roma ossia le piu rinomate citta del Lazio.

Tomo IV:

I sette colli di Roma antica e moderna.

Tomo V:

Le antichita di Pompei delineate sulle scoperte fatte sino a tutto l'anno 1800.

Tomo VI:

Gli archi trionfali onorarii e funebri degli antichi Romani.

Tomo VII:

Le porte antiche e moderne del recinto di Roma con le mura. prospetti e piante geometriche.

Tomo VIII:

Viaggio pittoresco da Roma a Napoli colle principali vedute di ambedue le città, delle campagne e dei paesi frapposti.

Tomo IX:

I monumenti piu interessanti di Roma dal decimo secolo sino al secolo decimottavo.

Tomo X:

Scenografia di Roma moderna che comprende le piu belle vedute delle principali strade, piazze e fontane.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1884. Band V. Heft 1. 8⁰.

G. C. J. Vosmaer. Studies on sponges. 8⁰. (Abdruck a. Mitth. d. Zool. Station zu Neapel. Band IV).

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. 1883. (Scienze fisiche e matematiche.) Vol. III. 8⁰.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali di Pisa. 1883. Processi-Verbali. Vol. IV. (Adunanza di 11 Novembre 1883.) 8⁰.

RUSLAND.

Mémoires du Comité géologique. St. Pétersbourg 1883. Vol. I. N⁰. 1. 4⁰.

Inhoud:

J. Lahusen. Die Fauna der Jurassischen Bildungen des Rjasanschen Gouvernements.

RUMENIË.

Operele principelui Demetriu Cantemiru, publicate de Academia Romana. Bucuresci 1883. Tomu VI—VII. 8⁰.

Pravila bisericésca numita cea mica tiparita mai intaiu la 1640, in manastirea govora; publicata acumu in transcriptiune cu litere latine de Academia Romana. Bucuresci 1884. 8⁰.

AZIË

Report on the meteorology of India in 1881. Calcutta 1883. fol.

Meteorological observations recorded at six stations in India reduced and corrected. Calcutta, June 1883. fol.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1883. Vol. LII. Part 1. N⁰. 1. Part 2. N⁰. 1. 8⁰.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1883. N⁰. 2—8. 8⁰.

Administration report of the meteorological reporter to the Government of Madras for the years 1881—1883. Madras 1882—1883. 8⁰.

Memoirs of the Science Department, University of Tokio. 1883. N⁰. 9. 4⁰.

Inhoud:

J. A. Ewing. Earthquake measurement.

E. Aymonier. Vocabulaire Cambodgien-Français. Saigon 1874. fol.

AFRIKA.

Bulletin de la Société Khédiviale de géographie. Le Caire 1883. 2e Série. N°. 4. 8°.

La Société Khédiviale de géographie. Notice par le Dr. F. Bonola. Le Caire 1883. 8°.

AMERIKA.

Proceedings of the Academy of natural sciences. Philadelphia 1883. Part 2. 8°.

38th Annual report of the Director of the Astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1884. 8°.

Science. Cambridge 1884. Vol. III. N°. 49—52. 8°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1884. Vol. III. N°. 28. 4°.

Journal of the American Medical Association. Chicago 1884. Vol. II. N°. 1—4. 4°.

Anales del Ministerio de fomento de la repulica Mexicana. Mexico 1882. Tomo VII. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1883. Tomo VIII. N°. 134—153. fol.

Observatorio meteorologico-magnetico central. Datos pluviometricos y agricolos, relativos a la estacion de aguas en el corriente ano de 1883. Plano.

El ensayo medico. Caracas 1884. Ano 1. N°. 11. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1884. Tomo XVII. Entr. 1. 8°.

Sistema de medidas y pesas de la republica Argentina. Buenos Aires 1881. 8⁰.

Sistema de medidas y pesas de la republica Argentina. Rectificacion de las medidas de longitud y de superficie de la provincia de Tucuman. Buenos Aires 1883. 8⁰.

AUSTRALIË.

Proceedings of the Linnean Society of N. S. W. Sydney 1883. Vol. VIII. Part 3. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1884. Nieuwe Serie. 17e Jaarg. N⁰. 1. 8⁰.

Journal des savants. Paris, Janvier 1884. 4⁰.

Annales de chimie et de physique. Paris 1883. 5e Série. Tome XXX. Novembre et Décembre. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1884. 5th Series. Vol. XVII. N⁰. 104. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1884. 5th Series. Vol. XIII. N⁰. 74. 8⁰.

Ephemeris epigraphica corporis inscriptionum latinarum supplementum. Berolini 1884. Vol V. Fasc. 1—2. roy. 8⁰.

Berichte der Deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1883. 1ster Jahrg. Heft 7—10. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1884. N⁰. 2—3. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1884. Neue Folge. Band XXI Heft 2. Beiblätter 1884. N⁰. 1. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1884. Band CCLI. Heft 4—7. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1883. 3e Période. Tome XX. N⁰. 60—61. 8⁰.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1884. 3 Période. Tome XI. N⁰. 1—2. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MAART 1884.

NEDERLAND.

Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam 1883. Deel X. St. 1. 8⁰.

Inventaris der archiefstukken berustende bij de Vereenigde Doopsgezinde gemeente te Amsterdam opgemaakt door Dr. J. G. de Hoop Scheffer. Amsterdam 1884. Deel II. 8⁰.

Staatkundig en staathuishoudkundig jaarboekje voor 1883, uitgegeven door de Vereeniging voor de statistiek in Nederland. Amsterdam 1884. 8⁰.

De Volksvlijt. Tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1883. N°. 11—12. 8°.

Sammlungen des Geologischen Reichsmuseums in Leiden. Mit Unterstützung des Niederländischen Ministeriums der Coloniën herausgegeben von K. Martin und A. Wichmann. Leiden 1884. Band III. Heft 2—3. 8°.

Verslag omtrent een geologisch onderzoek van de gronden in de Betuwe, in verband met waarnemingen betreffende de doorkwelling der dijken op last van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid ingesteld door Dr. F. Seelheim. 's Gravenhage 1883. 4°.

Dictionnaire nobilaire. Répertoire des généalogies et des documents généalogiques qui se trouvent dans la bibliothèque, les collections et les archives de A. A. Vorsterman van Oyen. La Haye. 8°.

Bibliotheek van Nederlandsche pamfletten. Verzamelingen van de bibliotheek van Joannes Thysius en de bibliotheek der Rijks-Universiteit te Leiden, bewerkt door Louis D. Petit. 's Gravenhage 1882—1884. Deel I—II. 4°.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1883, uitgegeven door het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut. Utreeht 1884. Jaarg. 35. 4°. Oblong.

Werken van het Historisch Genootschap. Utrecht 1883. Nieuwe Serie. N°. 36—37. 8°.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap. Utrecht 1884. Deel VII. 8°.

Kort overzicht der meteorologische waarnemingen in de Kara-Zee van 9 October 1882 tot 30 Juni 1883. fol. (Handschrift).

25ste Jaarlijksch verslag door de hoofd-commissie aan de leden van de Vereeniging tot daarstelling van eene algemeene openbare Bibliotheek en van een daaraan verbonden Leeskabinet te Rotterdam, medegedeeld in de algemeene vergadering van 23 Februari 1884. 8°.

H. F. Fynje. Beschouwingen over de aanwending van stoomgemaal tot verbetering der waterlossingen in het rijk van Nijmegen en Maas en Waal zoo ook in andere rivierpolders, waar een groot verschil in hoogte tot opvoer van water bestaat. Nijmegen 1884. 8°.

C. Ubaghs. L'age et l'homme préhistorique et ses ustensiles de la station Lacustre près Maestricht. Ruremonde s. a. 8°.

Statistiek van het Koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in- uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden December 1883 en Januari 1884. 's Gravenhage 1884. Nieuwe Serie. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

R. D. M. Verbeek. Topographische en geologische beschrijving van een gedeelte van Sumatra's Westkust. Batavia 1883. roy. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1883—1884. 3e Série. Tome VI. N°. 12. Tome VII. N°. 1. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1884. 3e Série. Tome XVIII. N°. 1—2 8°.

J. Plateau. Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision. 3e Supplément. Bruxelles. s. a. 4°.

——————— Sur l'observation des mouvements très rapides spécialement lorsqu'ils sont périodiques. 8°. (Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique Tome VI).

——————— Quelques expériences sur les lames liquides minces. 2e Note. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. Tome V).

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen, uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1884. 2de Jaarg. Afl. 3. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1884. Tome XCVIII. N°. 7—10. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1884. 2e Série. Tome XIII. N°. 8—12. 8°.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1884. Livr. 313—317. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1884. 10e Année. Vol. IX. N°. 388—392. 4°.

E. Hamon. Etude sur les eaux potables et le plomb. Paris 1884. 8⁰.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society. London 1883. Vol. XXXV. N⁰. 227. Vol. XXXVI. N⁰. 228. 8⁰.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1884. Vol. XLIV. N⁰. 4. 8⁰.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1884. New Series. Vol. VI. N⁰. 3. 8⁰.

Royal Microscopical Society. List of fellows. 1884. 8⁰.

John. A. R. Newlands. On the discovery of the periodic law and on relations among the atomic weights. London 1884. 8⁰.

The zoology of the voyage of H. M. S. Challenger. Part XXV. Report on the Cirripedia (systematic part) by Dr. P. P. C. Hoek. London-Edinburgh 1883. 4⁰.

Proceedings of the Royal Institution of Great Britain. London 1883. Vol. X. Part 2. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1883. N⁰. 38—53. roy. 8⁰.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische medicin. Berlin 1884. Band XCV. Heft 2. 8⁰.

J. Fröhlich. Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Berlin 1883. Band I. 8⁰.

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a. M. 1884. Band XIII. Heft 3. 4⁰.

Inhoud:

O. Koerner. Weitere Beiträge zur vergleichenden Anatomie und Physiologie des Kehlkopfs.
J. Probst. Natürliche Warmwasserheizung als Princip der climatischen Zustände der geologischen Formationen.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1884. Jahrg. 7. N⁰. 161—163. 8⁰.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1884. Band LXX. Heft 4. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1884. Band XXX. N⁰. 2. 4⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der Medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1884. Band XVII. Heft 1—2. 8⁰.

Zeitschrift des Vereins für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde. Jena 1883. Neue Folge. Band III. Heft 3—4. 8⁰.

Thüringische Geschichtsquellen. Jena 1883. Neue Folge. Band I. 8⁰.

Sitzungsberichte der Physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Würzburg 1883. Jahrg. 1883. 8⁰.

Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. 1882—1884. Jahrg. 1882—1883. 8⁰.

Anzeiger für Kunde der Deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. Nürnberg 1883. N⁰. 1—12. Mit 29ster Jahresbericht. 4⁰.

U. de Wilamowitz Moellendorff. De Lycophronis Alexandra commentaciuncula. Greifswald 1883. 4⁰.

A. Kiessling. Coniectaneorum Spicilegium I. Greifswald 1883. 4⁰.

H. Cremer. Reformation und Wissenschaft. Akademische Rede zum 400 jährigen Gedächtniss des Geburtstages D. Martin Luthers am 10 November 1883. Greifswald 1883. 8⁰.

S. Bartlitz. Ueber den Bruch der processus coronoideus ulnae Greifswald 1883. 8⁰.

P. Behncke. Zur Kenntniss der diuretischen Wirkung der Resina copaivae. Greifswald 1883. 8⁰.

S. Belakowicz. Zwei Fälle von (angeborenem) Lipom der männlichen Brustdrüse und Fusssohle. Greifswald 1883. 8⁰.

B. Beutlich. Beitrag zur Anatomie der Leberblutgefässe. Greifswald 1883. 8⁰.

Th. Brand. Beitrag zur Kenntniss der Wirkung der intravasculären Kochsalzinfusionen. Greifswald 1883. 8⁰.

C. Brandenburg. Ueber Nervenlähmungen an der obern Extremität durch Brüche des Oberarms. Greifswald 1883. 8⁰.

M. Dieterich. Zur Casuistik der Sehnen-und Nervennaht. Greifswald 1883. 8⁰.

P. Geissler. Beitrag zur Entstehungsweise und Behandlung des angeborenen Plattfusses. Greifswald 1883. 8⁰.

H. Gercke. Zur Verwerthung der Knochennaht bei Rippenfracturen. Greifswald 1883. 8⁰.

J. Grueter. Ein Fall von Lipoma fibrosum am Kopfe. Greifswald 1883. 8⁰.

W. Haltermann. Verwerthung und Methode der Exstirpatio tali. Greifswald 1883. 8⁰.

J. Hardel. Die Keilresection im Chopart'schen Gelenke beim Klumpfuss. Greifswald 1883. 8⁰.

A. Harguth. Ueber die plötzliche Todesursache bei Diphteritis. Greifswald 1883. 8⁰.

W. Jaworowicz. Ueber die Beugungsluxationen der Halswirbelsäule. Greifswald. 1883. 8⁰.

A. Kasper. Zur Casuistik der Neurome. Ein Fall von traumatischen Neurom des N. medianus, geheilt durch Nerven-Resection und Naht. Greifswald 1883. 8⁰.

Th. Kasper. Ueber die Resection des Capitulum radii. Greifswald 1883. 8⁰.

C. A. Marten. Ein Beitrag zur Kasuistik der Kehlkopfexstirpationen. Greifswald 1883. 8⁰.

E. Meridies. Ein statistischer Beitrag zu den Entbindungen alter Erstgebärender. Greifswald 1883. 8⁰.

P. Müller. Ueber zwei Fälle von Ektopia vesicae nebst Beiträgen zur operativen Behandlung derselben. Greifswald 1883. 8⁰.

A. Nolte. Ueber das Verhalten der Milz bei Syphilis. Greifswald 1883. 8⁰.

M. Oppenheimer. Ein Fall von traumatischer Luxatio femoris ileo-pectinea. Greifswald 1883. 8⁰.

Ramm. Ueber Darmwandbrüche nebst Beifügung eines Falles von eingeklemmten Darmwandbruch. Greifswald 1883. 8⁰.

A. Riebe. Beitrag zur Casuistik der Sprachstörungen. Greifswald 1883. 8⁰.

R. Rieger. Ueber operative Eingriffe bei nicht resecirbarem Pyloruscarcinom. Greifswald 1883. 8⁰.

F. Schmidt. Zwei Fälle von Kropfexstirpation. Greifswald 1883. 8⁰.

M. Schoebel. Ein Beitrag zur Messung des Blutdrucks sowie der Stärke und Grösse des Pulses am Menschen. Greifswald 1883. 8⁰.

A. Weischer. Ein Beitrag zur Muskulatur der Iris. Greifswald 1883. 8⁰.

H. Wiese. Zur Casuistik der Caries sicca des Schultergelenkes. Greifswald 1883. 8⁰.

R. Wintersohle. Ueber die penetrirenden Schussverletzungen des Thorax. Greifswald 1883. 8⁰.

Z. Wisniewski. Casuistischer Beitrag zur operativen Behandlung der Leberechinococcen. Greifswald 1883. 8⁰.

H. Zahl. Ueber die günstige Wirkung der Magneten zur Entfernung von Eisenstückchen aus dem Innern des Bulbus nebst Mittheilung eines selbst beobachteten derartigen Falles. Greifswald 1883. 8⁰.

A. Heffter. Ueber einige neue, vom Paratoluidin sich ableitende Schwefelverbindungen. Leipzig 1883. 8⁰.

O. Kornatzki. Ueber substituierte Sulfotoluolsäuren. Greifswald 1883. 8⁰.

W. Paysan. Ueber das Amid und die Thioverbindung der Amidotoluolsulfonsäure. Greifswald 1883. 8⁰.

M. Wolter. Die Mundbildung der Orthopteren mit specieller Berücksichtigung der Ephemeriden. Greifswald 1883. 4⁰.

A. Koch. Ueber Seeversicherung für fremde Rechnung. Greifswald 1883. 8⁰.

R. Richter. Das Herbart'sche u. Bergmann'sche Problem des Bewusztseins dargestellt und kritisch untersucht. Greifswald 1883. 8⁰.

M. Holtz. Der Konflikt zwischen dem Erzstift Trier und der Reichsstadt Boppard insbesondere im Jahre 1497. Greifswald 1883. 8⁰.

F. Wiedemann. Der Reichspolitik des Grafen Haug von Werdenberg in den Jahren 1466—1486. Stettin 1883. 8⁰.

P. Schütze. Das volkstümliche Element im Stil Ulrich von Zatzikhovens. Greifswald 1883. 8⁰.

P. Block. Zur Kritik des Petrus de Ebulo. II. Theil. Prenzlau 1883. 8⁰.

W. Bornemann. Boileau-Despreaux im Urtheile seines Zeitgenossen Jean Desmarets de Saint-Sorlin. Theil I. Altenburg 1883. 8⁰.

C. Guttmann. De earum quae vocantur Caesarianae orationum Tullianarum genere dicendi. Gryphiswaldiae 1883. 8⁰.

W. Heidsiek. Die ritterliche Gesellschaft in den Dichtungen des Crestien de Troies. Greifswald 1883. 8⁰.

E. Horn. De Aristarchi studiis Pindaricis. Gryphiswaldiae 1883. 8⁰.

M. Lierau. Die metrische Technik der drei Sonettisten Maynard, Gombauld und Malleville verglichen mit derjenigen Fr. Malherbe's. Teil I. Greifswald 1882. 8⁰.

J. Rassow. Quaestiones selectae de Euripideorum nuntiorum narrationibus. Gryphiswaldiae 1883. 8⁰.

C. Schueler. Quaestiones Vergilianae. Gryphiswaldiae 1883. 8⁰.

H. Schulz. Quaestiones Ovidianae. Gryphiswaldiae 1883. 8⁰.

A. Trabandt. De minoribus quae sub nomine Quintiliani feruntur declamationibus. Gryphiswaldiae 1883. 8⁰.

P. Richert. Ueber die Verallgemeinerung des Jakobi'schen Ausdruckes der Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale. Greifswald 1882. 8⁰.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1884. Transunti. Serie 3. Vol. VIII. Fasc. 4—6. 4⁰.

Memorie del Reale Istituto Lombardo di science e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. Milano 1883. Vol. XV. Fasc. 1. 4⁰.

Inhoud:

ZOJA. Del teschio di Pasquale Massacra pittore pavese.
VERGA. Dell' ubriachezza in Milano.
SANGALLI. Anatomia dell' ulcera cronica dello stomaco.
ASCHIERI. Fondamenti per una geometria dello spazio composto di rette.
ZOJA. Sul teschio di Antonio Bordoni matematico pavese.

Memorie del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Milano 1882—1883. Vol. XIV. Fasc. 3. Vol. XV. Fasc. 1. 4⁰.

Inhoud: Vol. XIV. Fasc. 3.

BUCCELLATI. Il nihilismo e la ragione del diritto penale.
POLI. Studi di filosofia contemporanea.
BIONDELLI. Dichiarazione di parecchi medaglioni e monete romane nedite.

Vol. XV. Fasc. I.

POLI. Studi di filosofia contemporanea.
OLIVA. Sul tentativo.
MASSARANI. Carlo Blanc e la critica d'arte in Francia negli ultimi 50 anni.
NORSA. Il telefono e la legge.
CANTU. Diplomatici della repubblica Cisalpina e del regno d'Italia

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Milano 1882. Serie 2. Vol. XV. 8⁰.

Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Milano 1882. Vol. VII. 8⁰.

P. MANTEGAZZA. Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1883. Vol. XIII. Fasc. 3. 8⁰.

PORTUGAL.

J. F. J. Biker. Collecçao de tratados e concertos de pazes que o estada da India Portugueza fez com os reis e senhores com quem teve relaçoes nas partes da Asia e Africa Oriental. Lisboa 1884. Tomo IV. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

J. Spanberg. Entomologisk tidskrift pa foranstaltande af Entomologiska Föreningen. Stockholm 1883. Arg. 4. Häft 1—4. 8⁰.

Vanstandsobservationer udgivet af den Norske Gradmaalingskommission. Christiania 1883. Hefte 2. 4⁰.

RUSLAND.

Bulletin de la Commission Géologique. St. Pétersbourg 1884. Année 1883. N⁰. 7—9. 8⁰.
(In het Russisch).

AZIË.

Registers of original observations in 1883, reduced and corrected at six places in India. August 1883. fol.

Report on the administration of the meteorological department of the government of India in 1882/83. fol.

Indian meteorological memoirs. Calcutta 1883. Vol. II. Part 2. fol.

AMERIKA.

Science. Cambridge 1884. Vol. III. N⁰. 53—57. 8⁰.

Journal of the American Medical Association. Chicago 1884. Vol. II. N⁰. 5—10. 4⁰.

John Hopkins University Circulars December 1879—October 1883. Baltimore 1882—1883. 2 Vol. 4⁰.

American Journal of mathematics. Edited by J. Sylvester. Baltimore 1883. Vol. VI. N⁰. 2. 4⁰.

American Chemical Journal. Edited by Ira Remsen. Baltimore 1883. Vol. V. N⁰. 6. 8⁰.

Geological and natural history survey of Canada. Report of progress for 1880—82. Montreal 1883. 8⁰

J. Macoun. Catalogue of Canadian plants. Part 1. Polypetalae. Montreal 1883. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1883—1884. Tomo VIII. N⁰. 154—156. Tomo IX. N⁰. 1—9. 11—12. fol.

El Ensayo Medico. Caracas 1884. Ano 1. N⁰. 11—13. 4⁰.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1883. N⁰. 10. 4⁰.

Actas de la Academia nacional de ciencias en Cordoba. Buenos-Aires 1884. Tomo V. Entr. 1. 4⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1884. Tomo XVII. Entr. 2. 8⁰.

Censo general de la provincia de Buenos Aires demografico, agricola, industrial, comercial, etc. verificado el 9 de Octubre de 1881. Buenos-Aires 1883. fol.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche kunst, letterkunde, nijverheid, enz. Amsterdam 1883. 1ste Jaarg. Afl. 4. 4°.

Journal des savants. Paris, Janvier-Février 1884. 4°.

Annales des sciences naturelles. Paris 1884. 6e Série. Botanique. Tome XVII. N°. 1—2. 8°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1884. 2e Série. Tome VIII. Janvier. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1884. 6e Série. Tome I. Janvier—Février. 8°.

The zoological record for 1882. London 1883. Vol. XIX. 8°.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1884. 5th Series. Vol. XVII. N°. 105. 8°.

Annals and magazine of natural history. London 1884. 5th Series. Vol. XIII. N°. 75. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1884. N°. 4—5. Nachrichten N°. 2. 8°.

Berichte der Deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1884. Band II. Heft 1. 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1883. Jahrg. 49. Heft 5. Jahrg. 50. Heft 1. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1883. 4te Folge. Band XI. Heft 4. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1884. Neue Folge. Band XXI. Heft 3. Beiblätter. Band VIII. St. 2. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1884. Band CCLI. Heft 8—11. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1884. 3e Période. Tome XXI. N⁰. 62. 8⁰.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1884. 3e Période. Tome XI. N⁰. 3. 8⁰.

VERSLAG

OMTRENT EENE

VERHANDELING VAN Dr. G. J. MICHAËLIS

GETITELD:

OVER DE THEORIE DER VEERKRACHTIGE NAWERKING.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884.)

114/83

Ondanks de talrijke experimenteele onderzoekingen over de nawerkingsverschijnselen na vormveranderingen van veerkrachtige lichamen, maakte de theoretische verklaring daarvan, wat betreft het mechanisme dier verschijnselen, nog slechts geringe vorderingen. Wel sprak reeds W. WEBER het denkbeeld uit, dat bij eene deformatie in het algemeen eene wenteling der moleculen zou plaats hebben en dat de nawerking hieraan zou toe te schrijven zijn, dat die wenteling slechts langzaam kan geschieden, maar deze gedachte werd door hem zelf in het geheel niet en naderhand door WARBURG slechts gedeeltelijk wiskundig uitgewerkt.

Dr. MICHAËLIS heeft de onderstelling van WEBER aan een uitvoerig onderzoek onderworpen. Hij ontwikkelt daartoe in de eerste plaats de formules voor de onderlinge werking van een stelsel moleculen, waarbij deze als lichaampjes van eene zekere uitgebreidheid worden opgevat en niet slechts de kracht maar ook het koppel wordt berekend, dat een molecuul van de overige deeltjes ondervindt. WARBURG had bij eene dergelijke berekening aangenomen, dat de bestanddeelen eener molecule alle gelijksoortig zijn. De schrijver maakt zich vrij van deze hypothese en verkrijgt

daardoor uitdrukkingen, die niet slechts in de elasticiteitsleer beter aan de werkelijkheid moeten beantwoorden, maar die ook in de theorie van het geinduceerde magnetisme van toepassing kunnen zijn.

In een stelsel van moleculen blijkt op een daarvan slechts dan een koppel te werken, wanneer de rangschikking der deeltjes niet met betrekking tot alle richtingen dezelfde is. WARBURG, die de verspreiding der moleculen in den natuurlijken toestand van het lichaam isotroop onderstelde, vond dan ook, dat alleen na eene deformatie een koppel zou bestaan, maar volgens zijne theorie worden in den natuurlijken toestand de moleculen niet in bepaalde richtingen vastgehouden. Toch moet dit noodzakelijk worden aangenomen, zal men tot eene nawerking, evenredig aan de deformatie, geraken. De Heer MICHAËLIS lost deze moeilijkheid op door de onderstelling, dat, al schijnt het lichaam ons in zijn geheel isotroop toe, dit niet geldt van de verschillende volume-elementen elk op zich zelf, waarin het kan worden verdeeld.

Eindelijk bespreekt de schrijver, ook hier een stap verder gaande dan WARBURG, de weerstanden, die zich tegen de wenteling der moleculen verzetten. Wordt vooreerst, naar het voorbeeld van sommige theoriën over het geïnduceerde magnetisme, een weerstand ondersteld, die de moleculen belet te wentelen, zoolang niet het koppel, dat er op werkt, eene bepaalde grootte bereikt heeft, dan geeft de theorie rekenschap van de blijvende vormveranderingen van veerkrachtige lichamen. Een weerstand aan den anderen kant, die, evenals eene wrijving, van de snelheid der wenteling afhangt, zal tot een langzaam verloop der nawerking aanleiding geven.

De verkregen resultaten worden uitvoerig op de uitrekking, de wringing en de buiging toegepast en met verschillende proeven, met name met die van BRAUN vergeleken, terwijl aan het slot der verhandeling eene bespreking gevonden wordt van den invloed der nawerking op de trillingen van veerkrachtige lichamen.

Ten deele ongetwijfeld wegens de aan het onderwerp

verbonden moeilijkheden, zijn de positieve resultaten, waartoe de schrijver geraakt, niet zeer talrijk, waarbij nog komt, dat hij de uitkomsten, die hij werkelijk verkregen heeft, niet zoo in het licht heeft gesteld als hij had kunnen doen. Eveneens hadden naar onze meening sommige der ingevoerde onderstellingen duidelijker uitgesproken kunnen worden. Eindelijk hebben wij eenige opmerkingen gemaakt van meer bijzonderen aard, die wij zouden wenschen, dat onder de aandacht van den schrijver werden gebracht, maar die het ons vergund zij, hier achterwege te laten.

Ofschoon de verhandeling van Dr. MICHAËLIS slechts het begin bevat van eene theorie van het verschijnsel, heeft hij toch het belangrijke onderwerp met grooten ijver en met succes behandeld. Hij heeft in verschillende opzichten de theorie een stap verder gebracht, en zijn arbeid zal als uitgangspunt voor verdere onderzoekingen kunnen dienen. Wij aarzelen dan ook niet, de Akademie voor te stellen, de verhandeling in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen, nadat de schrijver van onze opmerkingen zal zijn in kennis gesteld en gelegenheid zal hebben gehad om, naar aanleiding daarvan, indien hij dit wenscht, eenige wijzigingen aan te brengen.

H. A. LORENTZ.
R. A. MEES.

OVER DE THEORIE

DER

VEERKRACHTIGE NAWERKING

DOOR

G. J. MICHAËLIS.

§ 1. De vergelijkingen ter bepaling van het evenwicht en van de beweging der vaste veerkrachtige lichamen zijn af te leiden uit het beginsel, dat deze lichamen uit moleculen zijn samengesteld, die aantrekkende en afstootende krachten op elkander uitoefenen. De werking van de eene molecule op de andere wordt daarbij voorgesteld door een kracht en een koppel. Door de meeste schrijvers werd dit laatste zonder opheldering buiten beschouwing gelaten. Poisson *) meende, dat de verschillende koppels elkander opheffen, omdat in een werkingssfeer een zeer groot aantal moleculen voorkomen, die zonder regelmaat daarin verspreid zijn. Hij noemde het verdwijnen van het koppel een noodzakelijk gevolg van de wet der groote getallen. Het blijkt echter, dat in het algemeen, als men aan de moleculen een willekeurigen vorm toekent, de koppels elkander geenszins opheffen. Bij een eerste benadering kan men ze verwaarloozen, wanneer de onderlinge afstanden der moleculen zeer groot zijn ten opzichte van hare afmetingen; de uitkomsten, welke bij die onderstelling verkregen worden, zijn voldoende ter verklaring der gewone elastische vormveranderingen.

*) *Mémoires de l'Academie.* T. XVIII. Paris 1842.

De verschijnselen der veerkrachtige nawerking echter, door W. WEBER *) ontdekt en beschreven, kunnen volgens zijn opvatting door zulke koppels veroorzaakt worden. WEBER namelijk nam aan, dat, bij de vormverandering van een veerkrachtig lichaam, de moleculen verschoven worden en tevens wentelen. De verschuiving zou plotseling geschieden, de wenteling daarentegen zou door een weerstand belemmerd worden en daardoor langzaam plaats hebben. In het laatstgenoemde deel der beweging zocht WEBER de oorzaak der elastische nawerking. Deze meening was ook F. KOHLRAUSCH †) toegedaan, die uitvoerige waarnemingen omtrent het verschijnsel heeft verricht §). De wenteling der moleculen geeft volgens hem een bevredigende verklaring, als men onderstelt, dat zij langzaam geschiedt en dat door die wenteling een wijziging der moleculaire krachten kan teweeggebracht worden, zonder dat de deeltjes ten opzichte van elkaâr verschoven worden.

Hetzelfde denkbeeld heeft CLAUSIUS **) uitgesproken. Als een lichaam aan krachten onderworpen wordt, die in verschillende richtingen op ongelijke wijze werken, is het volgens CLAUSIUS duidelijk, dat de moleculen daarbij moeten draaien. Men behoeft maar te onderstellen, dat die beweging en ook de terugwenteling na opheffing der krachten langzaam volbracht worden, om de elastische nawerking volledig te verklaren.

Eindelijk heeft G. WIEDEMANN ††), door onderzoekingen omtrent den invloed der vormverandering van een lichaam op zijn magnetisme en omgekeerd, aangetoond, dat een verschuiving der moleculen altijd met een wenteling vereenigd is en dat de wenteling een verschuiving tengevolge kan hebben.

---

*) POGGENDORFF's *Annalen*. Band XXXIV, p. 247 en LIV, p. 1.

†) POGGENDORFF's *Annalen*. Band CXXVIII, p. 414.

§) POGGENDORFF's *Annalen*. Band CXIX, p. 350; CXXVIII, p. 1, 207, 399 en CLVIII, p. 337.

**) POGGENDORFF's *Annalen*. Band LXXVI, p. 66.

††) WIEDEMANN, *Annal. der Physik. und Chemie*. VI, p. 504.

WARBURG *) heeft, voor zoover mij bekend is, het eerst een poging gedaan om het denkbeeld van WEBER wiskundig uit te werken. Hij stelde de evenwichtsvoorwaarden op van een aantal onderling gelijke moleculen, die, zoo lang geen uitwendige krachten op het stelsel werken, gemiddeld op gelijke afstanden van elkaâr in rust ondersteld werden en leidde uit zijn berekening qualitatief eenige nawerkingsverschijnselen af. WARBURG nam aan, dat de verschillende punten eener molecule gelijksoortig zijn, zoodat de krachten, die tusschen twee moleculen werken, allen op dezelfde wijze van den afstand zouden afhangen. Verder bevond hij, bij de onderstellingen, die hij invoerde, het koppel, dat op een molecule werkt, alleen afhankelijk van de vormverandering van het stelsel. Na het verdwijnen der uitwendige krachten, zou de molecule, naar zijn berekening, niet weer teruggedraaid worden. Ook voerde hij geen weerstand in, dien de moleculen, volgens WEBER, bij de wenteling ondervinden.

Het kwam mij daarom niet overbodig voor om, bij meer algemeene onderstellingen, dit onderzoek nog eens op te vatten en vooral ook de gevolgtrekkingen na te gaan, tot welke de invoering van een terugwerkend koppel en van een weerstand, die de wenteling belemmert, leiden.

Vooreerst zijn een paar theorieën besproken, die op andere beginselen berusten. Daarna is de onderlinge werking berekend van twee moleculen, bij de onderstelling, dat tusschen twee punten krachten werken, die functiën van den afstand zijn: functiën, welke bij verschillende punten derzelfde moleculen niet aan elkaar gelijk behoeven te wezen. Aangenomen is daarbij, dat de afmetingen der moleculen klein zijn, vergeleken bij den onderlingen afstand.

De voorwaarden zijn onderzocht, waarbij een stelsel van moleculen, die een willekeurige gedaante hebben, door de krachten, welke zij op elkander uitoefenen, zullen wentelen. Zoolang geen uitwendige krachten op het stelsel werken, zijn de zwaartepunten der deeltjes bij standvastige tempera-

---

*) WIEDEMANN, *Annal. der Physik. und Chemie.* IV, p. 232.

tuur in rust ondersteld op afstanden, welke van de temperatuur afhangen.

De warmtebewegingen zijn dus verwaarloosd. De invloed der temperatuur op de *intensiteit* der nawerking, die, volgens de waarnemingen van KOHLRAUSCH *), aanzienlijk is, kan bij de ingevoerde onderstellingen niet berekend worden. Alleen kan in ruwe trekken worden aangegeven, wat gebeuren zal, als bij verhooging van temperatuur de gemiddelde afstanden grooter worden.

Door de *intensiteit* der nawerking verstaan wij de geheele verandering, die de krachten, welke op het lichaam werken, moeten ondergaan, om gedurende de wenteling der moleculen de vormverandering een standvastige waarde te doen behouden. Als daarentegen de krachten standvastig blijven, wordt de intensiteit gemeten door de wijziging, die de deformatie tengevolge van de wenteling ondergaat. Dit begrip wordt hier vooropgesteld, omdat KOHLRAUSCH, zooals in § 11 nader wordt meegedeeld, een standvastige grootheid, die in elke stof de snelheid der wenteling bepaalt, en dus ook de snelheid, waarmeê de spanningen veranderen, de *coëfficiënt* der nawerking heeft genoemd.

Afgezien nu van den invloed der temperatuur, geven de uitkomsten, die in de volgende bladzijden zullen afgeleid worden, rekenschap van een aantal kenmerkende eigenschappen der elastische nawerking.

Denkt men zich namelijk de moleculen een weinig ten opzichte van elkaar verschoven, dan vindt men, behalve de spanningen, die in de gewone theorie der elasticiteit voorkomen, nog anderen, welke van de afmetingen der moleculen afhangen, en gedurende de wenteling van dezen veranderen.

Deze bijkomende krachten verklaren dus het feit, dat de spanning van een lichaam veranderen kan, zonder dat zijn vorm en grootte gewijzigd worden. In hoeverre zij ook rekenschap geven van eenige zeer merkwaardige verschijnselen, die BRAUN †) omtrent de veerkrachtige nawerking heeft waar-

*) POGG. *Annalen*. CXXVIII, p. 216.

†) POGGENDORFF's *Annal*. CLIX, p. 337.

genomen, wordt in § 8 uitvoerig besproken. Alleen als in een werkingssfeer een zeer groot aantal gelijke moleculen aanwezig zijn, die in den natuurlijken toestand van het lichaam gemiddeld naar alle richtingen gelijk gerangschikt zijn, bestaat bij een vormverandering geen terugwerkend koppel. Dit eenvoudige geval (dat WARBURG onderstelde), is eerst onderzocht en daarbij aangenomen, dat de moleculen vrij kunnen wentelen.

Daarna is nagegaan, wat gebeuren zal, als om elk punt de rangschikking der moleculen niet isotroop is. Verder is de invloed berekend, dien een weerstand op de verkregen uitkomsten heeft.

Verschillende hypothesen zijn opgesteld omtrent den weerstand, dien de moleculen bij de wenteling ondervinden, zoowel ter verklaring van de langzame beweging bij de elastische nawerking, als van de blijvende verandering in richting na de werking van mechanische en magnetische krachten. In de paragrafen 11 en 12 zijn de voornaamsten dier hypothesen vermeld en is over hare waarde, bij de berekening der verschijnselen, het een en ander meegedeeld.

Eindelijk volgen nog een paar opmerkingen over den invloed van de veerkrachtige nawerking op de demping der trillingen.

§ 2. Een andere theorie der veerkrachtige nawerking werd door O. E. MEIJER *) gegeven. Zij verdient slechts kortelijk vermeld te worden, daar de schrijver haar later heeft ingetrokken †).

MEIJER ging van de hypothese uit, dat in vaste lichamen, even als in gassen en vloeistoffen, een inwendige wrijving zou bestaan tusschen de deelen, die zich ten opzichte van elkander bewegen, en zocht daarin de oorzaak der nawerking. Hij nam dus aan, dat de spanningen in een veerkrachtig lichaam niet alleen van de verschuiving der deeltjes zouden afhangen, maar ook van de snelheid dier verschuiving. Uit de bewegingsvergelijkingen, welke hij opstelde,

*) POGG. *Annal.* CLI, p. 108.

†) WIEDEMANN *Annal.* IV, p. 257.

leidde MEIJER de beweging van een elastischen draad af, die door een kracht plotseling wordt uitgerekt.

Behalve de veerkrachtige trillingen, vond hij een niet-periodieke beweging van den draad, en meende, dat deze door de inwendige wrijving langzamer gedempt wordt dan de trillingen.

BOLTZMANN *) echter merkte op, dat MEIJER de massa van het gewicht, waarmede de draad bij de proeven belast wordt, buiten rekening had gelaten. Wordt dit gewicht in aanmerking genomen, dan vindt men, dat de demping der langzaamste slingering veel kleiner uitvalt dan de grootheid, die MEIJER als maat van de nawerking beschouwd had, zoodat zijn theorie het verschijnsel volstrekt niet verklaren kan; hoewel de inwendige wrijving, die hij onderstelde, hoogstwaarschijnlijk in vaste lichamen wel zal voorkomen, moet dus voor de nawerking een andere oorzaak gezocht worden.

BOLTZMANN heeft in de genoemde verhandeling een andere theorie medegedeeld.

Hij nam aan, dat de krachten, die op een lichaam moeten werken om het een bepaalde vormverandering te doen ondergaan, ook afhankelijk zijn van verplaatsingen, die de deeltjes van het lichaam al vroeger ondergaan hebben. De kracht, die een bepaalde verschuiving veroorzaakt, is kleiner, naarmate reeds te voren verplaatsingen in dezelfde richting zijn voorgekomen. Als op den tijd τ, gedurende het tijdselement $d\tau$, een verschuiving v bestaan heeft, stelde BOLTZMANN den invloed van deze op de kracht, welke op een anderen tijd t een verplaatsing in dezelfde richting veroorzaakt, evenredig met v, met $d\tau$ en met een functie van het tijdsverloop $t - \tau$. Verder nam hij, voor kleine verplaatsingen althans, het beginsel der superpositie aan.

De theorie van BOLTZMANN heeft het voordeel, dat zij op enkele algemeene grondstellingen berust en geen hypothesen noodig heeft omtrent de inwendige samenstelling der licha-

---

*) POGG. *Annal.* Ergänzb. VII, p. 627.

men. Het is echter de vraag, of die grondstellingen de nawerkingsverschijnselen volledig kunnen beschrijven.

Wat vooreerst het beginsel der superpositie betreft, dit is door BOLTZMANN bij de torsie van een glazen staaf proefondervindelijk onderzocht en hij verkreeg bevredigende uitkomsten.

Ook F. KOHLRAUSCH *) vond bij dezelfde stof resultaten, die vrij nauwkeurig met BOLTZMANN's theorie overeenstemden.

Bij een zilverdraad echter waren de waarden, die volgens het beginsel berekend werden, allen grooter dan die, welke gemeten werden. Zelfs bij benadering kwam daarbij het beginsel niet uit. MESSER †) vond, bij onderzoekingen omtrent de buiging van een staaf van caoutchouc, het beginsel evenmin bevestigd. Wil men aannemen, dat het met grooter nauwkeurigheid gelden zal, naarmate de vormveranderingen kleiner zijn, dan moet ik, vooral op grond van proeven, door G. WIEDEMANN genomen, (zie § 12) opmerken, dat waarschijnlijk bij vele stoffen de nawerking zich eerst na grootere vormveranderingen begint te vertoonen. In het geval, dat de verplaatsingen zeer klein zijn, zou zij door den inwendigen weerstand geheel verhinderd worden.

BOLTZMANN schreef het logarithmisch decrement der veerkrachtige trillingen aan nawerking toe. De overeenstemming, die hij vond tusschen de grootte van dat decrement, door berekening uit zijn theorie en door waarnemingen verkregen, is, volgens een opmerking door P. M. SCHMIDT §) gemaakt, slechts aan een rekenfout toe te schrijven.

In de onderstellingen van BOLTZMANN is verder geen ander specifiek onderscheid tusschen de oorspronkelijke veerkrachtige verplaatsingen en de bewegingen der nawerking opgesloten, dan dat de eersten snel en de laatsten langzaam plaats hebben. De nawerking wordt als een rest der elastische verschuiving opgevat. De theorie kan dus geen

---

*) POGG. *Annal.* CLX. p. 231.

†) *Berichte der naturf. Ges. zu Freiburg* in Br. II.

§) WIEDEMANN's *Annal.* II. p. 272.

rekenschap geven van de verschijnselen, door BRAUN in de bovengenoemde verhandeling (zie pag. 303) zoo uitvoerig beschreven, welke in hun aard geheel verschillend zijn van die der oorspronkelijke veerkrachtige vormveranderingen.

Door NEESEN *) is een poging gedaan om de nawerkingsverschijnselen af te leiden uit de botsingen, die de moleculen van een lichaam bij hare periodieke bewegingen ondergaan.

Iedere molecule, zegt NEESEN, slingert om een bepaalden stand van evenwicht onder den invloed der aantrekkende krachten en der botsingen van de omringende moleculen. De botsingen moeten in geregelde volgorde plaats hebben, zoolang geen uitwendige krachten op het lichaam werken, omdat anders geen beweging om een vasten evenwichtsstand mogelijk zou wezen. Werkt echter een kracht op het lichaam, dan worden de deeltjes ten opzichte van elkaar verschoven, de geregelde opvolging der botsingen wordt verbroken, de molecule kan niet om een zelfde punt blijven slingeren. Een voortdurende verplaatsing van de punten, om welke de moleculen zich bewegen, is het gevolg van de onregelmatigheid der botsingen, die eerst langzamerhand weer verdwijnt. Het is duidelijk, dat men, bij de geheele onbekendheid, waarin men verkeert, ten opzichte van den aard der warmtebewegingen, de denkbeelden van NEESEN niet wiskundig analyseeren kan. Het is zelfs moeilijk om na te gaan, of werkelijk in een dergelijke verstoring der regelmatigheid van de botsingen een geregelde verplaatsing van den gemiddelden evenwichtsstand besloten is, zooals die bij de veerkrachtige nawerking wordt waargenomen.

NEESEN heeft echter de uitwerking der botsingen op een molecule beschouwd op een willekeurig oogenblik na het ontstaan der deformatie, en ook op het oogenblik, dat het evenwicht hersteld is. Het verschil tusschen deze werkingen behandelde hij als een geleidelijk afnemende kracht. Hij kwam daardoor tot een betrekking tusschen de spanning

---

*) POGG. *Annal.* CLVII, p. 579.

en de verschuiving in eenig punt van een veerkrachtig lichaam. Zijn formule heeft veel overeenkomst met de grondformule van BOLTZMANN. Hier komen echter drie onbepaalde functiën voor: twee van de verschuivingen en één van den tijd, terwijl BOLTZMANN slechts twee onbepaalde functiën van den tijd invoerde. Overigens kunnen omtrent deze formulen dezelfde opmerkingen gemaakt worden: ook hier worden de gewone veerkrachtige verplaatsingen en de bewegingen gedurende de nawerking als van denzelfden aard aangemerkt. Deze theorie eischt, evenals die van MEIJER, dat wanneer b. v. een staaf aan de eene zijde bevestigd wordt en aan den anderen kant een torsie ondergaat, die men standvastig laat blijven, de moleculen zich toch ten opzichte van elkander verplaatsen, omdat men daarbij een vermindering van het moment van torsie waarneemt. Inderdaad merkte NEESEN op, dat een spiegeltje, in het midden van een staaf van caoutchouc bevestigd, die op de genoemde wijze getordeerd was, zich gedurende geruimen tijd geregeld naar ééne richting verplaatste.

MEIJER heeft de proef met getordeerde draden van verschillende stoffen herhaald; spiegels waren op verschillende hoogten van de draden vastgehecht, tegenover elken spiegel was een kijker met verdeelde schaal opgesteld. Elke spiegel bewoog zich, eerst sneller, daarna langzamer, altijd naar dezelfde richting, afhangende van die der torsie. Wanneer echter een draad aan het boveneinde even sterk getordeerd werd als aan het andere uiteinde, bewogen de spiegels zich niet op dezelfde wijze. In het algemeen overtuigde MEIJER zich, dat de waargenomen bewegingen hoofdzakelijk hieraan toe te schrijven waren, dat de draden niet homogeen waren, en dus in de verschillende deelen de nawerking niet hetzelfde verloop had. Hij kwam tot het besluit, dat deze spiegelproeven eerder tegen dan vóór zijn theorie pleiten, dus evenzeer tegen die van NEESEN.

Een ander beginsel heeft NISSEN *) als uitgangspunt

---

*) *Beiblätter der Physik und Chemie*, V. p. 19.

eener theorie opgesteld. De uitwisseling tusschen den ether in een vast lichaam en in de omringende lucht, ten gevolge der trillingen van de moleculen, zou, na de toeneming van den gemiddelden afstand van deze, een langzame vermeerdering van den ether in het lichaam veroorzaken. In dat binnenstroomen van ether wordt de oorzaak van de nawerking gezocht. Het is mij onbekend, of de schrijver zijn theorie later verder heeft uitgewerkt. Voorloopig gaf hij te kennen, dat zijn beschouwingen zich het meest aan die van NEESEN aansloten.

Na dit korte overzicht van de hoofdbeginselen, waarop de meest bekende theoriën der veerkrachtige nawerking berusten, gaan wij die van WEBER nader onderzoeken.

§ 3. Om tot een uitdrukking te komen voor de onderlinge werking van twee moleculen, zal eerst die van een molecule op een daar buiten gelegen punt worden nagegaan.

Ik stel mij een molecule voor als een vereeniging van punten, die onder de werking van mechanische krachten vast verbonden blijven.

De kracht tusschen een punt der molecule en een uitwendig punt, zij een willekeurige functie van hun afstand, waarin verschillende constanten kunnen voorkomen.

Een punt O der molecule wordt als oorsprong van een met die molecule vast verbonden, rechthoekig coördinatenstelsel genomen. Zij A het uitwendige punt; zijn afstand tot een willekeurig punt P der molecule worde r_1 genoemd. De aantrekking die tusschen A en P werkt, zij $f(r_1)$.

Zijn x, y en z de coördinaten van A, x_1 y_1 en z_1 die van P, dan zijn de ontbondenen der kracht volgens de assen:

$$X_1 = f(r_1)\frac{x - x_1}{r_1}; \quad Y_1 = f(r_1)\frac{y - y_1}{r_1}; \quad Z_1 = f(r_1)\frac{z - z_1}{r_1}.$$

Als men de krachten, die A op alle punten der molecule uitoefent, naar O overbrengt, vindt men voor de componenten van het koppel, dat daarbij ontstaat:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1) &= \Sigma\left\{f(r_1)\frac{z y_1 - y z_1}{r_1}\right\}\\ \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1) &= \Sigma\left\{f(r_1)\frac{x z_1 - z x_1}{r_1}\right\}\\ \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1) &= \Sigma\left\{f(r_1)\frac{y x_1 - x y_1}{r_1}\right\}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(1)$$

Stellen wij nog $\frac{f(r_1)}{r_1} = F(r_1)$, den afstand $OA = a$, de lijn $OP = R_1$ en den hoek $POA = \varphi_1$.

Uit de vergelijking:

$$r_1^2 = R_1^2 + a^2 - 2\,a\,R_1 \cos\varphi_1$$

volgt, als $\frac{R_1}{a}$ een zeer kleine grootheid is, als dus de afmetingen der molecule klein zijn, vergeleken met den afstand van haar punten tot A, bij benadering:

$$r_1 = a - R_1 \cos\varphi_1 + \frac{R_1^2}{2a}\sin^2\varphi_1.$$

Men vindt, als $F(r_1)$ een doorloopende functie is:

$$F(r_1) = F(a) + \left(-R_1\cos\varphi_1 + \frac{R_1^2}{2a}\sin^2\varphi_1\right)F'(a) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(-R_1\cos\varphi_1 + \frac{R_1^2}{2a}\sin^2\varphi_1\right)^2 F''(a) + \text{enz.}\ldots\ldots(2)$$

Wanneer deze reeks snel convergeert, hetgeen het geval zal zijn, als $a\,F'(a)$, $a^2 F''(a)$, $a^3 F'''(a)$ grootheden zijn van dezelfde orde als $F(a)$, vindt men ongeveer:

$$F(r_1) = F(a) - R_1\cos\varphi_1 F'(a) = F(a) - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{a}F'(a).$$

Zulk een herleiding stellen wij mogelijk voor elke functie, die de kracht tusschen A en eenig punt der molecule voor-

stelt. Het kan echter zijn, dat sommige dier functiën of haar differentiaal-quotiënten verwaarloosd kunnen worden, omdat de intensiteit der krachten zeer verschillend kan wezen. Door substitutie van de formule voor $F(r_1)$ in de vergelijking (1) ontstaat het koppel:

$$\Sigma \left\{ \left[F(a) - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{a} F'(a) \right] (z y_1 - y z_1) \right\}, \ldots (3)$$

volgens de x-as en dergelijke koppels voor de y- en de z-assen. Deze reeksontwikkeling is dus voortgezet tot termen, die ten opzichte der afmetingen van de moleculen van de tweede orde zijn. Hetzelfde zal in alle volgende reeksontwikkelingen geschieden. Men kan ook de ontbondenen der kracht en van het koppel uit een potentiaal-functie afleiden, wier aangroeiing den arbeid der krachten voorstelt. Zij deze:

$$U = \Sigma F_1 (r)$$

$$\text{en} \quad F_1 (r_1) = - \int f (r_1) \, d r_1$$

dan is:

$$U = \Sigma \left[F_1 (a) + \left\{ x x_1 + y y_1 + z z_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{2} \right\} F(a) - \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{(x x_1 + y y_1 + z z_1)^2}{2 a} \right\} F'(a) \right] \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Hiervoor kan geschreven worden:

$$U = \Sigma F_1 (a) - \Sigma \left\{ \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{2} F(a) \right\} + x \Sigma \{ F(a) x_1 \} +$$

$$+ y \Sigma \{ F(a) y_1 \} + z \Sigma \{ F(a) z_1 \} - \frac{x^2}{2} \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} x_1^2 \right\} -$$

$$- \frac{y^2}{2} \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} y_1^2 \right\} - \frac{z^2}{2} \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} z_1^2 \right\} - x y \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} x_1 y_1 \right\} \text{enz.} \ldots (5)$$

In het algemeen zullen de termen, waarin de eerste machten van x_1, y_1 en z_1 voorkomen, groot zijn ten opzichte

van die, welke de tweede machten dezer grootheden bevatten; dan kunnen de laatsten tegen de eersten verwaarloosd worden. Er bestaat altijd een punt in de molecule met de eigenschap, dat wanneer het tot oorsprong der x, y en z-assen wordt gekozen, $\Sigma\{F(a)x_1\}$ $\Sigma\{F(a)y_1\}$ en $\Sigma\{F(a)z_1\}$ verdwijnen. Zij verdwijnen dan ook voor alle vlakken, die door dat punt gaan. Het punt is echter afhankelijk van den afstand a. Kiest men het zwaartepunt der molecule als oorsprong en brengt men twee coördinaat-vlakken door het beschreven punt, dan verdwijnt het koppel, als A (het aangetrokken punt) in de snijlijn ligt. Op elken afstand bestaat dus een bepaalde evenwichtsas ten opzichte van de draaiende beweging der molecule. In het bijzondere geval, dat alle bestanddeelen der molecule gelijksoortig zijn, dat dus de kracht voor allen eenzelfde functie van den afstand is, wordt de zaak anders. Zij m_1 de massa van een punt der molecule, m_1' die van het uitwendige punt A en zij nu de kracht tusschen deze twee punten, volgens een onderstelling, die dikwijls gemaakt is: $m_1 m_1' f(r_1)$, waarbij $f(r_1)$ alleen met den afstand verandert, dan kan voor vergelijking (5) in de plaats worden geschreven:

$$U = m_1' \Big[M_1 F_1(a) - \frac{F(a)}{2} \Sigma m_1 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \\ - \frac{x^2}{2} \frac{F'(a)}{a} \Sigma (m_1 x_1^2) - \frac{y^2}{2} \frac{F'(a)}{2} \Sigma (m_1 y_1^2) - \\ - \frac{z^2}{2} \frac{F'(a)}{a} \Sigma (m_1 z_1^2) \Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Als oorsprong is weer het zwaartepunt gekozen, de coördinaatassen vallen samen met de hoofdassen der centrale ellipsoide, M_1 is de massa der molecule. Dezen vorm neemt nu de functie U aan, ten opzichte van dezelfde assen, op welken afstand het punt A ook van het zwaartepunt ligge.

Stellen wij nog:

$$\Sigma (m_1 x_1^2) = A_1; \quad \Sigma (m_1 y_1^2) = B_1; \quad \Sigma (m_1 z_1^2) = C_1$$

Stelt men zich voor, dat het punt A en het zwaartepunt op onveranderlijken afstand blijven, maar dat de molecule vrij wentelen kan, dan kunnen de evenwichtsvoorwaarden gemakkelijk bepaald worden. Als namelijk:

$$x = a \cos \chi \cos \psi$$

$$y = a \cos \chi \sin \psi$$

$$z = a \sin \chi$$

zijn, vindt men, wanneer het punt A in de x-as ligt en dus $\sin \chi = 0$, $\sin \psi = 0$ zijn, terwijl $m_1' = 1$ wordt genomen:

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \chi \partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = a F'(a)(A_1 - C_1) \text{ en}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = a F'(a)(A_1 - B_1).$$

Zij $A_1 > B_1 > C_1$, dan ligt het punt A in de as van het kleinste traagheidsmoment. Men ziet, dat U een maximum of minimum is, naarmate $F'(a)$ negatief of positief uitvalt. In het eerste geval, dat o. a. bij de aantrekking volgens de wet van NEWTON voorkomt, zal dus U een maximum en het evenwicht standvastig zijn, indien het aangetrokken punt in de as van het kleinste traagheidsmoment ligt. Het evenwicht ten opzichte der beweging om het zwaartepunt zal wankelbaar zijn, als het punt in de as van het grootste traagheidsmoment gelegen is. Wanneer het punt in de as van het gemiddelde traagheidsmoment ligt, hangt de aard van het evenwicht af van de verplaatsing.

§ 4. Zoeken wij nu de potentiaal der werking van twee moleculen op elkander.

In het algemeene geval, als omtrent de verschillende functiën $F(a)$ niets bijzonders ondersteld is, worde door een punt O' der tweede molecule een rechthoekig assen-stelsel aangebracht. De coördinaten van O (de oorsprong der assen in de eerste molecule) zijn ten opzichte van dat stelsel: a_1', b_1', c_1', die van een punt der tweede molecule: x_1', y_1', z_1'.

De coördinaten van O' ten opzichte der assen in de eerste molecule zijn: a_1, b_1, c_1. Als de afstand van O en O' door R wordt voorgesteld, vindt men, even als in vergelijking (5):

$$F_1(a) = F_1(R) - \frac{(x_1')^2 + (y_1')^2 + (z_1')^2}{2} F(R) + a_1' F(R) x_1' +$$
$$+ b_1' F(R) y_1' + c_1' F(R) z_1' - \frac{(a_1')^2}{2} \frac{F'(R)}{R} (x_1')^2 - \text{enz.}$$

Voor den term $F(a)x_1$, die in vergelijking (5) voorkomt, kan geschreven worden:

$$F(a)x_1 = F(R)x_1 - a_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 x_1' - b_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 y_1' - c_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 z_1',$$

terwijl de verdere termen der ontwikkeling, die ten opzichte van de afmetingen der moleculen van hoogeren graad dan den tweeden zijn, verwaarloosd worden.

Het product $x\,F(a)\,x_1$ uit (5) kan in deze gedaante worden gebracht

$$a_1 F(R) x_1 + \alpha F(R) x_1 x_1' + \beta F(R) x_1 y_1' + \gamma F(R) x_1 z_1' -$$
$$- a_1 a_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 x_1' - a_1 b_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 y_1' - a_1 c_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 z_1'.$$

α, β, γ zijn de cosinussen der hoeken, die de x'-, y'- en z'-assen in de tweede molecule met de x-assen in de eerste vormen. Voor $\frac{F'(a)}{a} x_1^2$ kan $\frac{F'(R)}{R} x_1^2$ in de plaats worden geschreven.

In alle termen, die met tweede machten van x, y en z in (5) of met haar producten twee aan twee vermenigvuldigd zijn, kunnen bij den aangenomen graad van benadering deze letters door a_1, b_1 en c_1 worden vervangen.

Substitueert men al deze waarden in de vergelijking (5) en sommeert men over alle combinatiën twee aan twee der punten van beide moleculen, dan ontstaat de gezochte potentiaal. Zij is zeer samengesteld. Behalve de eerste

en tweede machten der coördinaten a_1, b_1 en c_1, a_1', b_1' en c_1' komen alle producten twee aan twee dezer grootheden voor en die termen hebben verschillende coëfficiënten.

Bestond elke molecule b. v uit twee magneetpolen en nam men voor de werking van twee polen de aantrekking of afstooting omgekeerd evenredig met de tweede macht van den afstand aan, dan zou men, in iedere molecule de magnetische as als x—as aannemende, van alle ontwikkelde termen slechts behouden:

$$\alpha\ F(R)\, x_1 x_1' - a_1 a_1' \frac{F'(R)}{R}\, x_1 x_1'.$$

Hieruit leidt men gemakkelijk de bekende formule voor de potentiaal af:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{R^3} [\alpha - 3 \cos (x R) \cos (x' R)],$$

wanneer μ_1 en μ_2 de magnetische momenten zijn.

In het algemeen zullen de standen, die de moleculen met betrekking tot elkaâr moeten innemen, opdat zij niet om hun zwaartepunten wentelen, van den afstand der zwaartepunten afhangen.

Wanneer weder de bijzondere onderstelling wordt ingevoerd, dat voor alle punten de aantrekking een zelfde functie van den afstand is, kan men bij dezelfde notatie als in (6), de potentiaal in den vorm brengen:

$$V = M_1 M_1' F_1 (R) - M_1' \frac{F(R)}{2} (A_1 + B_1 + C_1) -$$

$$- M_1 \frac{F(R)}{2} (A_1' + B_1' + C_1') - M_1' \frac{F'(R)}{2R} (A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + C_1 c_1^2) -$$

$$- M_1 \frac{F'(R)}{2} [A_1' (a_1')^2 + B_1' (b_1')^2 + C_1' (c_1')^2] \quad . \ . \ . \ . \ (7)$$

Daarbij zijn in beide moleculen de zwaartepunten als oorsprong en de hoofdassen der centrale ellipsoïden als coördinaat-assen gekozen. De grootheden M_1', A_1', B_1'

en C_1' hebben voor de tweede molecule dezelfde beteekenissen als dezelfde letters zonder accenten voor de eerste.

De componenten van het koppel, die op het eerste lichaam, volgens de assen x, y en z werken, zijn:

$$M_1' \frac{F'(R)}{R} (B_1 - C_1) b_1 c_1,$$

$$M_1' \frac{F'(R)}{R} (C_1 - A_1) a_1 c_1,$$

$$M_1' \frac{F'(R)}{R} (A_1 - B_1) a_1 b_1.$$

Deze ontbondenen hangen dus in dit bijzondere geval niet van de traagheidsmomenten der tweede molecule af en evenmin van den stand harer assen ten opzichte van die der eerste molecule. Het is duidelijk, dat dit in het algemeene geval, wegens de termen, die de producten $a_1 a_1'$ enz. bevatten, wel zal plaats hebben.

Men vindt hier verder door een beschouwing, gelijk aan die in de vorige paragraaf, dat bij een aantrekking de potentiaal een maximum is, bij een bepaalden afstand der zwaartepunten, wanneer de assen der kleinste traagheidsmomenten in elkaars verlengde vallen. Het evenwicht ten opzichte van den stand der assen is dan standvastig. Het zal wankelaar zijn, wanneer de assen der grootste traagheidsmomenten in één richting liggen.

§ 5. Een stelsel van moleculen, wier zwaartepunten door de onderlinge werking in rust ondersteld worden, zij gegeven. Men kan aannemen, dat dit geschiedt onder den invloed van aantrekkende en afstootende krachten. Even als de zwaartepunten in den natuurlijken toestand van het stelsel op bepaalde onderlinge afstanden in evenwicht zijn, zullen de assen der moleculen ook bepaalde richtingen moeten aannemen. Wijken zij van die richtingen af, dan oefenen de andere moleculen gezamenlijk een koppel uit, dat de bedoelde assen in de oorspronkelijke standen terugvoert. Om de richting eener molecule bij het evenwicht

te vinden, heeft men het gedeelte der potentiaal van het stelsel op die molecule noodig, dat van de coördinaten der zwaartepunten afhangt, niet dat, hetwelk alleen van de afstanden R afhankelijk is. Als het beschouwde deeltje geheel binnen het stelsel ligt, moet bij de opstelling van de potentiaal der krachten, die er op werken, gesommeerd worden over alle moleculen, die in zijn werkingssfeer voorkomen.

Ondersteld worde, dat de moleculen in een werkingssfeer aan elkander gelijk zijn, dat zij evenwijdig gericht zijn en dat hun aantal groot is.

In een ruimte-element, dat een groot aantal werkingssferen bevat, zullen de assen der moleculen gemiddeld naar alle richtingen gelijkelijk verspreid zijn; neemt men echter aan, dat die richtingen slechts geleidelijk kunnen veranderen van het eene punt tot het andere, dan kan men ze in een werkingssfeer op weinig na als evenwijdig beschouwen.

Verder zullen moleculen, die een willekeurigen vorm hebben, in een werkingssfeer niet isotroop gerangschikt zijn. Een groep moleculen met evenwijdige assen zullen namelijk in de richtingen dier assen niet met dezelfde kracht op elkaâr werken, zooals uit de beschouwing in de vorige § volgt, als loodrecht op die richting. Een gevolg moet zijn, dat de zwaartepunten in de eene richting meer tot elkander naderen dan in de andere. Zijn b. v. de moleculen symmetrisch rondom een as, dan kan men daaruit misschien afleiden, dat zij ook in de werkingssfeer symmetrisch ten opzichte eener lijn gerangschikt moeten zijn.

Een lichaam, dat gewoonlijk als isotroop wordt beschouwd, moet men zich dus voorstellen als een vereeniging van niet-isotrope deelen. Men kan echter in een ruimte-element, dat groot is, ten opzichte eener werkingssfeer, een isotrope rangschikking onderstellen.

Nemen wij nu in de moleculen evenwijdige assen door hun zwaartepunten aan.

Zijn de coördinaten van het zwaartepunt van een molecule, die in de werkingssfeer van een bepaald deeltje ligt, ten opzichte der assen, die in het laatstgenoemde zijn aan-

gebracht: a_1, b_1 en c_1 dan is de potentiaal der werking tusschen beide moleculen:

$$V = \Sigma \Big[F_1(R) - \{a_1(x_1' - x_1) + b_1(y_1' - y_1) + c_1(z_1' - z_1) + \\ + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1 x_1' - y_1 y_1' - z_1 z_1'\} F(R) - \\ - \{a_1^2(x_1^2 - x_1 x_1') + b_1^2(y_1^2 - y_1 y_1') + c_1^2(z_1^2 - z_1 z_1') + \\ + 2 a_1 b_1 (x_1 y_1 - x_1 y_1') + 2 a_1 c_1 (x_1 z_1 - x_1 z_1') + \\ + 2 b_1 c_1 (y_1 z_1 - y_1 z_1')\} \frac{F'(R)}{R} \Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

waarbij men in het oog moet houden, dat wegens de gelijkheid der moleculen: $\Sigma \{x_1^2 F(R)\} = \Sigma \{(x_1')^2 F(R)\}$ is, en dergelijke vergelijkingen ontstaan, als men x_1 door y_1 of z_1, en x_1' door y_1' of z_1' vervangt.

Zulk een uitdrukking moet men zich opgesteld denken om de werking te vinden, tusschen de beschouwde molecule en elk deeltje, dat in haar werkingssfeer voorkomt en daarna moet de som gezocht worden.

Men kan daarbij echter eenige termen weglaten. Vooreerst hebben, zooals reeds werd opgemerkt, de termen, die onafkelijk zijn van de coördinaten a_1, b_1 en c_1, geen invloed op het koppel, dat gezocht wordt. In de tweede plaats verdwijnen de termen, die alleen de eerste machten dezer grootheden bevatten, elk afzonderlijk, als men over de werkingssfeer sommeert, bij de onderstelling waarvan wij uitgaan, dat die sfeer drie loodrechte assen van symmetrie bevat. Voor elk paar moleculen op gelijke afstanden van het centrale deeltje gelegen en diametraal tegenover elkaâr, verdwijnen dan namelijk die termen.

Wij moeten dus verder het gedeelte der potentiaal tusschen twee moleculen behouden:

$$V_1 = A_{11} a_1^2 + A_{22} b_1^2 + A_{33} c_1^2 + 2 A_{12} a_1 b_1 + 2 A_{13} a_1 c_1 + \\ + 2 A_{23} b_1 c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

als gesteld wordt:

$$A_{11} = \Sigma (x_1 x_1' - x_1^2) \frac{F'(R)}{R} \qquad A_{12} = \Sigma (x_1 y_1' - x_1 y_1) \frac{F'(R)}{R}$$

$$A_{22} = \Sigma (y_1 y_1' - y_1^2) \frac{F'(R)}{R} \qquad A_{13} = \Sigma (x_1 z_1' - x_1 z_1) \frac{F'(R)}{R}$$

$$A_{33} = \Sigma (z_1 z_1' - z_1^2) \frac{F'(R)}{R} \cdot \qquad A_{23} = \Sigma (y_1 z_1' - y_1 z_1) \frac{F'(R)}{R} \cdot$$

Wij voeren een coördinaten-stelsel in, dat in het lichaam een vasten stand behoudt en waarvan de oorsprong met het zwaartepunt der onderzochte molecule samenvalt. Worden deze assen ξ, η en ζ genoemd en bestaan tusschen de coördinaten van een punt ten opzichte van deze assen en van het selsel x, y, z de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \xi + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \zeta \\ y &= \beta \xi + \beta_1 \eta + \beta_2 \zeta \\ z &= \gamma \xi + \gamma_1 \eta + \gamma_2 \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Worden verder de coördinaten van het punt (a_1, b_1, c_1) ten opzichte der nieuwe assen ξ_1, η_1, ζ_1 genoemd, dan verandert V_1 in:

$$\begin{aligned} V_1 = {} & A_{11} (\alpha \xi_1 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \zeta_1)^2 + A_{22} (\beta \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \zeta_1)^2 + \\ & + A_{33} (\gamma \xi_1 + \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1)^2 + \\ & + 2 A_{12} (\alpha \xi_1 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \zeta_1) (\beta \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \zeta_1) + \\ & + 2 A_{13} (\alpha \xi_1 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \zeta_1) (\gamma \xi_1 + \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1) + \\ & + 2 A_{23} (\beta \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \zeta_1) (\gamma \xi_1 + \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1) \ldots (11) \end{aligned}$$

Als de werkingssfeer drie onderling loodrechte assen van symmetrie heeft, kunnen deze tot ξ-, η- en ζ-assen worden gekozen. Dan zijn ten opzichte van elk der coördinatenvlakken twee moleculen steeds zoodanig gelegen, dat het zwaartepunt van de eene het spiegelbeeld is van dat punt in de andere. Dientengevolge vindt men na optelling over alle punten binnen de werkingssfeer:

$$\begin{aligned}\Sigma V_1 = \Sigma [& A_{11} (\alpha^2 \xi_1^2 + \alpha_1^2 \eta_1^2 + \alpha_2^2 \zeta_1^2) + \\ & + A_{22} (\beta^2 \xi_1^2 + \beta_1^2 \eta_1^2 + \beta_2^2 \zeta_1^2) + \\ & + A_{33} (\gamma^2 \xi_1^2 + \gamma_1^2 \eta_1^2 + \gamma_2^2 \zeta_1^2) + \\ & + 2A_{12} (\alpha\beta \xi_1^2 + \alpha_1 \beta_1 \eta_1^2 + \alpha_2 \beta_2 \zeta_1^2) + \\ & + 2A_{13} (\alpha\gamma \xi_1^2 + \alpha_1 \gamma_1 \eta_1^2 + \alpha_2 \gamma_2 \zeta_1^2) + \\ & + 2A_{23} (\beta\gamma \xi_1^2 + \beta_1 \gamma_1 \eta_1^2 + \beta_2 \gamma_2 \zeta_1^2)] \quad . \; . \; (12)\end{aligned}$$

Indien de rangschikking der moleculen isotroop ware, zou men in deze vergelijking ξ_1 in de plaats mogen stellen van η_1 en ζ_1 en men zou vinden:

$$\Sigma V_1 = \Sigma [\xi_1^2 (A_{11} + A_{22} + A_{33})].$$

Men ziet, dat daarbij de potentiaal onafhankelijk wordt van de richtingscosinussen en daar nu de ξ, η en ζ-assen willekeurig kunnen worden gekozen, blijkt het, dat geen koppel op de moleculen werkt, welke richtingen zij ook hebben.

Neemt men nog de hypothese aan, dat in iedere molecule drie loodrechte vlakken van symmetrie voorkomen, wier doorsneden tot x, y en z-assen worden gekozen. Dan verdwijnen de grootheden A_{12}, A_{13} en A_{23}. Immers in elke molecule liggen dan symmetrisch ten opzichte van ieder coördinaat-vlak gelijksoortige punten. In een molecule liggen b. v. de punten C_1 en C_2 symmetrisch ten opzichte van het xy-vlak; evenzoo in een tweede de punten C_1' en C_2'. Geeft nu de werking tusschen C_1 en C_1' in de potentiaal den term: $x_1 z_1 \frac{F'(R)}{R}$, dan geeft de werking tusschen C_1' en C_2 den term: $- x_1 z_1 \frac{F'(R)}{R}$. De combinatie $C_1 C_1'$ levert o. a.: $x_1 z_1' \frac{F'(R)}{R}$ en de combinatie $C_1 C_2'$: $- x_1 z_1' \frac{F'(R)}{R}$. Op dezelfde wijze toont men aan, dat de overige grootheden, die in A_{12}, A_{13} en A_{23} voorkomen, elkaâr paarsgewijze opheffen. Men zal gemakkelijk inzien, dat dezelfde eigenschap ook nog moet gelden, wanneer de punten, die elkaârs spiegelbeelden zijn, tegengestelde eigenschappen bezitten, wat in

magneten zal gebeuren. Gaat deze onderstelling omtrent de structuur der moleculen samen met de bovengenoemde hypothese omtrent de rangschikking der deeltjes in de werkingssfeer, dan gaat (12) over in:

$$\Sigma V_1 = \Sigma[(\alpha^2\xi_1^2+\alpha_1^2\eta_1^2+\alpha_2\zeta_1^2)A_{11}+(\beta^2\xi_1^2+\beta_1^2\eta_1^2+\beta_2^2\zeta_1^2)A_{22}+ \\ + (\gamma^2\xi^2 + \gamma_1^2\eta_1^2 + \gamma_2^2\zeta_1^2)A_{33}] \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Om hieruit het koppel af te leiden, dat op de beschouwde molecule werkt, bij een bepaalden stand harer assen, moet de arbeid bepaald worden, die verricht wordt, wanneer de deeltjes in haar werkingssfeer een weinig gewenteld worden. Als in de ruimte-eenheid n moleculen aanwezig zijn, zou de onderlinge potentiaal $\frac{1}{2} n \Sigma V_1$ bedragen, wanneer zij allen evenwijdig gericht waren en de toestand in het geheele element dezelfde ware als in de werkingssfeer. Deze onderstelling heeft blijkbaar geen invloed op het gezochte koppel. Dan zou de arbeid, die verricht werd, indien de moleculen evenveel wentelden, $\frac{1}{2} n d . \Sigma V_1$ bedragen. Op iedere molecule zou een even groot koppel werken en dus de arbeid op elk der moleculen $\frac{1}{2} d . \Sigma V_1$ zijn.

Als men dit in aanmerking neemt, vindt men voor de componenten van het koppel, dat uit vergelijking (13) volgt de waarden:

$$\Sigma \{(\beta\gamma\xi_1^2 + \beta_1\gamma_1\eta_1^2 + \beta_2\gamma_2\zeta_1^2)(A_{33} - A_{22})\},$$

$$\Sigma \{(\alpha\gamma\xi_1^2 + \alpha_1\gamma_1\eta_1^2 + \alpha_2\gamma_2\zeta_1^2)(A_{11} - A_{33})\},$$

$$\Sigma \{(\alpha\beta\xi_1^2 + \alpha_1\beta_1\eta_1^2 + \alpha_2\beta_2\zeta_1^2)(A_{22} - A_{11})\}.$$

Men ziet, dat het koppel verdwijnt, als de assen der moleculen met die der werkingssfeer samenvallen.

Bij de bijzondere hypothese, voor welke vergelijking (7) geldt, verandert formule (8) in:

$$\Sigma V_1 = -\Sigma \left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}(A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + C_1 c_1^2)\right\},$$

wanneer weder de assen x, y en z samenvallen met de hoofd-

assen der centrale ellipsoïde in iedere molecule, terwijl nu echter omtrent de rangschikking in de werkingssfeer niets ondersteld is. Voert men weder de vaste assen in, volgens de formulen (10), dan kan men schrijven:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma V_1 = -\{&A_1(\alpha^2 T_\xi + \alpha_1^2 T_\eta + \alpha_2^2 T_\zeta + 2\alpha\alpha_1 T_{\xi\eta} + \\ &\quad + 2\alpha\alpha_2 T_{\xi\zeta} + 2\alpha_1\alpha_2 T_{\eta\zeta}) \\ &+ B_1(\beta^2 T_\xi + \beta_1^2 T_\eta + \beta_2^2 T_\zeta + 2\beta\beta_1 T_{\xi\eta} + \\ &\quad + 2\beta\beta_2 T_{\xi\zeta} + 2\beta_1\beta_2 T_{\eta\zeta}) \\ &+ C_1(\gamma^2 T_\xi + \gamma_1^2 T_\eta + \gamma_2^2 T_\zeta + 2\gamma\gamma_1 T_{\xi\eta} + \\ &\quad + 2\gamma\gamma_2 T_{\xi\zeta} + 2\gamma_1\gamma_2 T_{\eta\zeta})\}\end{aligned}\right\} \ldots (14)$$

wanneer gesteld wordt:

$$T_\xi = \Sigma\left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}\xi_1^2\right\}; \qquad T_\eta = \Sigma\left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}\eta_1^2\right\};$$

$$T_\zeta = \Sigma\left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}\zeta_1^2\right\}; \qquad T_{\xi\eta} = \Sigma\left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}\xi_1\eta_1\right\};$$

$$T_{\xi\zeta} = \Sigma\left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}\xi_1\zeta_1\right\}; \qquad T_{\eta\zeta} = \Sigma\left\{M_1' \frac{F'(R)}{R}\eta_1\zeta_1\right\}.$$

Daar R voor elk punt der werkingssfeer standvastig blijft gedurende de wenteling der deeltjes om hun zwaartepunten, kan men aantoonen, dat de assen ξ, η en ζ zoodanig kunnen worden gekozen, dat $T_{\xi\eta}$, $T_{\xi\zeta}$ en $T_{\eta\zeta}$ verdwijnen. De assen voor welke die eigenschap geldt, noemen wij de hoofdassen der werkingssfeer. Een molecule is in evenwicht, als haar traagheidsassen samenvallen met de hoofdassen der werkingssfeer. In deze § heb ik, naar aanleiding van de welwillende opmerkingen der Heeren Prof. Lorentz en Prof. Mees, die verslag over deze verhandeling hebben uitgebracht, eenige wijzigingen gemaakt.

§ 6. Het stelsel moge nu een kleine vormverandering ondergaan. De verschuivingen eener molecule in de richtingen der vaste assen worden u, v en w genoemd. Deze grootheden worden als doorloopende functiën van de coördinaten behandeld; voor de gemiddelde verplaatsing eener

groep van moleculen zal, wegens haar groot aantal, deze eigenschap mogen ondersteld worden.

Door het verschoven zwaartepunt van een molecule worden assen aangebracht, die evenwijdig zijn met ξ, η en ζ. De coördinaten van een naburig zwaartepunt, die oorspronkelijk ξ_1, η_1 en ζ_1 waren, zullen daarbij overgaan in:

$$\xi_1 + u_\xi \xi_1 + u_\eta \eta_1 + u_\zeta \zeta_1,$$
$$\eta_1 + v_\xi \xi_1 + v_\eta \eta_1 + v_\zeta \zeta_1,$$
$$\zeta_1 + w_\xi \xi_1 + w_\eta \eta_1 + w_\zeta \zeta_1,$$

waarin u_ξ, u_η, v_ξ enz. geschreven zijn in plaats van de differentiaal-quotiënten: $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ enz. Deze quotiënten worden allen als zeer klein ondersteld. Zij R' de veranderde afstand van twee punten, dan kan bij benadering worden gesteld:

$$\lambda(R') = \lambda(R) + [\, u_\xi \xi_1^2 + v_\eta \eta_1^2 + w_\zeta \zeta_1^2 + \\ + (u_\eta + v_\xi)\, \xi_1 \eta_1 + (u_\zeta + w_\xi)\, \xi_1 \zeta_1 + (v_\zeta + w_\eta)\, \eta_1 \zeta_1 \,] \frac{\lambda'(R)}{R},$$

als $\lambda(R)$ een doorloopende functie van R voorstelt en $\lambda'(R) = \frac{\partial \lambda(R)}{\partial R}$ is. Als in het algemeen geval de functie ΣV_1 (zie vergelijking 11) in den oorspronkelijken toestand van het stelsel een term $\Sigma(A_{10}\xi_1)$ bevatte, zou deze na de deformatie den vorm aannemen:

$$\Sigma\{A_{10}\xi_1\} + u_\xi \Sigma\{A_{10}\xi_1\} + u_\eta \Sigma\{A_{10}\eta_1\} + \\ + u_\zeta \Sigma\{A_{10}\zeta_1\} + u_\xi \Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1^3\right\} + v_\eta \Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi\eta_1^2\right\} + \\ + w_\zeta \Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1\zeta_1^2\right\} + (u_\eta + v_\xi)\Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1^2\eta_1\right\} + \\ + (u_\zeta + w_\xi)\Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1^2\zeta_1\right\} + (v_\rho + w_\eta)\Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1\eta_1\zeta_1\right\},$$

wanneer $A_{10}' = \frac{\partial A_{10}}{\partial R}$ is.

Men vindt dus den oorspronkelijken term, vermeerderd met een aantal termen, die de quotiënten u_ξ, v_η enz. als factoren bevatten. Daar dit met alle grootheden, die in (11) voorkomen, ook het geval moet wezen, hebben wij slechts het gedeelte van ΣV_1, dat de genoemde quotiënten bevat, nader te onderzoeken. Wij nemen nu aan, dat in den natuurlijken toestand van het lichaam de afwijking van een isotrope rangschikking der moleculen binnen een werkingssfeer slechts gering is. Dan kan die afwijking in het onderzochte deel van ΣV_1 verwaarloosd worden, wegens het kleine bedrag der vormverandering. Men ziet nu, dat in bovenstaande uitdrukking alle termen, die op den eersten volgen, moeten verdwijnen.

De term $a^2 \Sigma \{ A_{11} \xi_1^2 \}$ uit (11), geeft het van de vormverandering afhangende bedrag:

$$a^2\Big[2 u_\xi \Sigma \{A_{11}\xi_1^2\} + 2u_\eta \Sigma \{A_{11}\xi_1\eta_1\} + 2 u_\zeta \Sigma \{A_{11}\xi_1\zeta_1\} +$$
$$+ u_\xi \Sigma \left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^4\right\} + v_\eta \Sigma \left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\eta_1^2\right\} + w_\zeta \Sigma \left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\zeta_1^2\right\} +$$
$$+ (u_\eta + v_\xi) \Sigma \left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^3\eta_1\right\} + (u_\zeta + w_\xi) \Sigma \left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^3\zeta_1\right\} +$$
$$+ (v_\zeta + w_\eta) \Sigma \left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\eta_1\zeta_1\right\}\Big].$$

Hierin zijn de termen, die tweede machten en producten van de grootheden u_ξ, v_η enz. bevatten, als kleine grootheden van hoogere orden verwaarloosd.

Men kan nu, bij de gemaakte onderstellingen, schrijven:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\{A_{11}\xi_1^2\} = \Sigma\{A_{11}\eta_1^2\} = \Sigma\{A_{11}\zeta_1^2\} = T_{11}\\
&\Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^4\right\} = \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\eta_1^4\right\} = \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\zeta_1^4\right\} = T_{11}'\\
&\Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\eta_1^2\right\} = \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\zeta_1^2\right\} = \text{enz.} = T_{11}''
\end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

terwijl

$$\Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\,\xi_1^3\,\eta_1\right\} = \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\,\xi_1^3\,\zeta_1\right\} = \Sigma\,\{A_{11}\,\xi_1\,\eta_1\} = 0$$

worden.

De beschouwde term wordt daardoor:

$$\alpha^2\,[2\,u\xi\,T_{11} + u\xi\,T_{11}' + (v_\eta + w\zeta)\,T_{11}'']\,.$$

Evenzoo verandert de term $\alpha_1^2\,\Sigma\,\{A_{11}\,\eta_1^2\}$ in:

$$\alpha_1^2\,[2\,v_\eta\,T_{11} + v_\eta\,T_{11}' + (u\xi + w\zeta)\,T_{11}'']$$

terwijl $\alpha_2^2\,\Sigma\,\{A_{11}\,\zeta_1^2\}$ oplevert:

$$\alpha_2^2\,[2w\zeta\,T_{11} + w\zeta\,T_{11}' + (u\xi + v_\eta)\,T_{11}'']\,.$$

De som dezer termen is, zooals na een kleine herleiding blijkt:

$$(T_{11} + T_{11}' - T_{11}'')(\alpha^2\,u\xi + \alpha_1^2\,v_\eta + \alpha_2^2\,w\zeta) + (u\xi + v_\eta + w\zeta)\,T_{11}''.$$

Van deze som behouden wij in de verdere berekeningen alleen het gedeelte, dat van de richtingscosinussen afhangt, omdat dit alleen invloed op het koppel kan hebben.

Nog zij:

$$2\,T_{11} + T_{11}' - T_{11}'' = B_{11} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

De term $2\,\alpha\alpha_1\,\Sigma\,\{A_{11}\,\xi_1\,\eta_1\}$ uit vergelijking (11) geeft, na een soortgelijke herleiding:

$$2\,\alpha\alpha_1\,(u_\eta + v\xi)\,(T_{11} + T_{11}'')\,.$$

Stellen wij:

$$T_{11} + T_{11}'' = C_{11} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Grootheden, die evenzoo uit A_{22}, A_{33}, A_{12} enz. ontstaan als B_{11} en C_{11} uit A_{11}, worden met B_{22}, B_{33}, B_{12}, C_{22}, C_{33}, C_{12} aangeduid. Wanneer men alle termen herleidt, die in de vergelijking (11) voorkomen, vindt men het deel der potentiaal, dat van de vormverandering van het lichaam afhangt:

$$
\left.
\begin{aligned}
\Sigma V_2 = {} & (B_{11}\alpha^2 + B_{22}\beta^2 + B_{33}\gamma^2 + 2B_{12}\alpha\beta + \\
& \quad + 2B_{13}\alpha\gamma + 2B_{23}\beta\gamma)\, u_\xi + \\
& + (B_{11}\alpha_1^2 + B_{22}\beta_1^2 + B_{33}\gamma_1^2 + 2B_{12}\alpha_1\beta_1 + \\
& \quad + 2B_{13}\alpha_1\gamma_1 + 2B_{23}\beta_1\eta_1)\, v_\eta + \\
& + (B_{11}\alpha_2^2 + B_{22}\beta_2^2 + B_{33}\gamma_2^2 + 2B_{12}\alpha_2\beta_2 + \\
& \quad + 2B_{13}\alpha_2\gamma_2 + 2B_{23}\beta_2\gamma_2)\, w_\zeta + \\
& + 2[C_{11}\alpha\alpha_1 + C_{22}\beta\beta_1 + C_{33}\gamma\gamma_1 + C_{12}(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) + \\
& \quad + C_{13}(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) + C_{23}(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma)](u_\eta + v_\xi) + \\
& + 2[C_{11}\alpha\alpha_2 + C_{22}\beta\beta_2 + C_{33}\gamma\gamma_2 + C_{12}(\alpha\beta_2 + \alpha_2\beta) + \\
& \quad + C_{13}(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma) + C_{23}(\beta\gamma_2 + \beta_2\gamma)](w_\xi + v_\zeta) + \\
& + 2[C_{11}\alpha_1\alpha_2 + C_{22}\beta_1\beta_2 + C_{33}\gamma_1\gamma_2 + C_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \\
& \quad + C_{13}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + C_{23}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)](v_\zeta + w_\xi)
\end{aligned}
\right\} \ldots (18)
$$

Deze uitdrukking kan nog vereenvoudigd worden, omdat over de richtingen der x-, y- en z-assen nog willekeurig beschikt kan worden. Men kan ze zoodanig kiezen, dat B_{12}, B_{13} en B_{23} binnen de werkingssfeer verdwijnen. Men bedenke, dat hier over den bouw der moleculen niets ondersteld is en over de rangschikking slechts dit, dat de afwijking van een isotrope verdeeling in den natuurlijken toestand klein is.

Voert men in de moleculen nieuwe assen in door de substituties:

$$
\begin{aligned}
X &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\
Y &= \alpha_2' x + \beta_1' y + \gamma_1' z \\
Z &= \alpha_1' x + \beta_2' y + \gamma_2' z
\end{aligned}
$$

dan gaat de waarde van B_{12} ten opzichte der nieuwe assen over in:

$$
\begin{aligned}
& \alpha'\alpha_1' B_{11} + \beta'\beta_1' B_{22} + \gamma'\gamma_1' B_{33} + (\alpha'\beta_1' + \alpha_1'\beta') B_{12} + \\
& \quad + (\alpha'\gamma_1' + \alpha_1'\gamma') B_{13} + (\beta'\gamma_1' + \beta_1'\gamma') B_{23}
\end{aligned}
$$

omdat de afstanden R en de coördinaten der zwaartepunten onveranderd blijven. Stelt men B_{12}, B_{13}, B_{23} ten opzichte

der nieuwe assen nul, dan kunnen uit de vergelijkingen, die daarbij ontstaan, de richtingscosinussen bepaald worden.

De oplossing van dit vraagstuk geschiedt, zooals bekend is, door middel van de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} B_{11}-\lambda, & B_{12}, & B_{13} \\ B_{12}, & B_{22}-\lambda, & B_{23} \\ B_{13}, & B_{23}, & B_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

die van den derden graad is ten opzichte van λ en altijd drie reële wortels heeft. De richtingen der assen, voor welke B_{12}, B_{13} en B_{23} verdwijnen, hangen dus in het algemeen van den onderlingen afstand der moleculen af.

Wanneer echter de krachten, die tusschen de verschillende punten van twee moleculen werken, allen op dezelfde wijze van den afstand afhangen, kunnen de assen x, y en z zoodanig aangenomen worden, dat in de uitdrukking voor de onderlinge werking van elk paar moleculen: A_{12}, A_{13} en A_{23} niet voorkomen. Dit geldt evenzoo bij de onderstellingen die tot vergelijking (13) aanleiding geven. In de formule (18) verdwijnen dan zoowel de coëfficiënten C_{12}, C_{13} en C_{23} als B_{12}, B_{13} en B_{23} ten opzichte van dezelfde assen, op welken afstand de zwaartepunten der moleculen ook gelegen zijn. Bij kleine magneten zouden bovendien in A_{11}, A_{22} en A_{33} (zie vergel. 9) de grootheden:

$$\Sigma\left\{\frac{F'(R)}{R}x_1^2\right\}, \quad \Sigma\left\{\frac{F'(R)}{R}y_1^2\right\} \quad \text{en} \quad \Sigma\left\{\frac{F'(R)}{R}z_1^2\right\}$$

verdwijnen, als ten minste de magnetische krachten alleen in rekening werden gebracht.

Wanneer tusschen elke twee punten krachten werkten, die evenredig waren met het product hunner massa's en volgens dezelfde wet van den afstand afhingen, zouden de assen ten opzichte waarvan de bovengenoemde coëfficiënten verdwijnen, de hoofdassen der centrale ellipsoïden van de moleculen zijn. Dan worden:

$$A_{11} = -M_1' \frac{F'(R)}{R} A_1; \qquad A_{22} = -M_1' \frac{F'(R)}{R} B_1;$$

$$A_{33} = -M_1' \frac{F'(R)}{R} C_1,$$

waarin A_1, B_1 en C_1 dezelfde beteekenissen hebben als op pag. 312. Men kan dan in plaats van de grootheden, die door de vergelijkingen (15) ingevoerd werden, schrijven:

$$T_{11} = -A_1 T; \quad T_{11}' = -A_1 T'; \quad T_{11}'' = -A_1 T''' \text{ enz.}$$

en in plaats van de vergelijkingen (16) en (17):

$$B_{11} = -A_1(2T + T' - T''); \quad B_{22} = -B_1(2T + T' - T'');$$
$$B_{33} = -C_1(2T + T' - T'');$$
$$C_{11} = -A_1(T + T'''); \quad C_{22} = -B_1(T + T''');$$
$$C_{33} = -C_1(T + T''). \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

De vergelijking (18) neemt dan de eenvoudige gedaante aan:

$$\begin{aligned}\Sigma V_2 = &-(A_1\alpha^2 + B_1\beta^2 + C_1\gamma^2)(2T + T' - T')u_\xi \\ &-(A_1\alpha_1^2 + B_1\beta_1^2 + C_1\gamma_1^2)(2T + T' - T''')v_\eta \\ &-(A_1\alpha_2^2 + B_1\beta_2^2 + C_1\gamma_2^2)(2T + T' - T')w_\zeta \\ &-2(A_1\alpha\alpha_1 + B_1\beta\beta_1 + C_1\gamma\gamma_1)(T + T''')(u_\eta + v_\xi) \\ &-2(A_1\alpha\alpha_2 + B_1\beta\beta_2 + C_1\gamma\gamma_2)(T + T')(w_\xi + u_\zeta) \\ &-2(A_1\alpha_1\alpha_2 + B_1\beta_1\beta_2 + C_1\gamma_1\gamma_2)(T + T''')(v_\zeta + w_\eta) \ldots (20)\end{aligned}$$

Wanneer in een werkingssfeer een volkomen isotrope rangschikking der moleculen ondersteld werd, zou ΣV_2 in de vergelijkingen (18) en (20) de geheele potentiaal op een molecule voorstellen, voor zooverre deze van de richting harer assen afhangt. Immers toonden wij in § 5 aan, dat bij deze onderstelling in den natuurlijken toestand van het lichaam het bedoelde deel der potentiaal verdwijnt. Dit eenvoudige geval zal vooreerst nader onderzocht worden.

Men kan in de algemeene formule (18) de assen ξ, η en ζ laten samenvallen met de hoofdassen der elasticiteitsellipsoïde in het beschouwde punt. Dan worden $u_\eta + v_\xi = 0$, $w_\eta + v_\zeta = 0$ en $u_\zeta + w_\xi = 0$. Laat men daarna de assen

x, y en z, voor welke de grootheden B_{12}, B_{13} en B_{23} verdwijnen (en die wij in het vervolg de *assen* der molecule zullen noemen), samenvallen met de assen ξ, η en ζ, dan verdwijnt het koppel.

Iedere molecule van een oorspronkelijk isotroop lichaam, dat een vormverandering ondergaan heeft, is in evenwicht als haar assen in de richtingen van de assen der elasticiteits-ellipsoide vallen. Met den onderlingen afstand der moleculen veranderen in het algemeen de richtingen van hare assen. Bij de hypothese, die tot vergelijking (20) voert, zijn zij de hoofdtraagheidsassen.

Bij stabiel evenwicht moet ΣV_2 een maximum wezen. Om te onderzoeken, wanneer dit zal plaats hebben, worden in de vergelijking (18) in plaats van de negen cosinussen, drie onafhankelijk veranderlijken ingevoerd: de hoek tusschen de z- en de ζ-assen $= \theta$; de hoek tusschen de doorsnede der vlakken xy en $\xi\eta$ met de ξ-as $= \psi$; de hoek, dien deze doorsnede met de x-as maakt, $= \varphi$.

Wanneer de x-as samenvalt met de ξ-as, de y-as met de η-as en de z-as met de ζ-as, vindt men, als de vaste assen samenvallen met de hoofdassen der elasticiteits-ellipsoide:

$$\frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \theta} = 0; \qquad \frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \psi} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi \partial \theta} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \psi \partial \theta} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \theta^2} = 2\,(B_{33} - B_{22})\,(v_\eta - w_\zeta);$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \psi^2} = -\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi \partial \psi} = 2\,(B_{22} - B_{11})\,(u_\xi - v_\eta).$$

Stelt t een grootheid voor, van welke de hoeken φ, ψ en θ afhangen, dan is ΣV_2 een maximum of minimum voor bepaalde waarden van u_ξ, v_η en w_ζ, naarmate $\frac{d^2 \Sigma V_2}{d t^2}$ negatief of positief is.

Nu is:

$$\frac{d^2 \Sigma V_2}{d t^2} = \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Dus is ΣV_2 een maximum en het evenwicht stabiel, als:

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi^2} < 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \theta^2} < 0 \text{ zijn.}$$

Worden de grootheden B_{11}, B_{22} en B_{33} als positief ondersteld en $B_{11} > B_{22} > B_{33}$ aangenomen, dan is, bij den gekozen stand der assen het evenwicht stabiel, wanneer $u\xi > v_\eta > w\zeta$ is. Bij de beperkende hypothese, die vergelijking (20) tot grondslag heeft, moet in dezelfde omstandigheden $2\,T + T' - T'' < 0$ worden ondersteld en $A_1 > B_1 > C_1$. Dan is het evenwicht stabiel als de as van het kleinste traagheidsmoment samenvalt met de grootste as der elasticiteits-ellipsoide en omgekeerd.

§ 7. De spanningen, die op de zijvlakken van een kleinen kubus binnen het lichaam werken, wiens aangrenzende ribben evenwijdig met de vaste assen zijn, kunnen uit de gevonden formules berekend worden. De lengte der ribbe van den kubus worde als eenheid aangenomen. De normale spanningen in de richtingen der ξ, der η en der ζ-as, worden t_{11}, t_{22} en t_{33} genoemd; de tangentieele spanningen zijn t_{12}, t_{23} en t_{31}. Zij zijn achtereenvolgens loodrecht op de ξ-, de η- en de ζ-assen en vallen in de richtingen der η-, der ζ- en der ξ-assen.

De arbeid, die door deze spanningen verricht wordt, gedurende een kleine vormverandering van den kubus, is:

$$t_{11}\,\delta u\xi + t_{22}\,\delta v_\eta + t_{33}\,\delta w\zeta + t_{12}\,\delta(u_\eta + v\xi) + t_{23}\,\delta(v\zeta + w_\eta) + \\ + t_{31}\,\delta(w\xi + u\zeta).$$

Deze arbeid kan nog op een andere manier worden voorgesteld. Zij W de potentiaal der onderlinge werking van de moleculen binnen den kubus. Deze heeft, zooals bekend is, de eigenschap, dat de variatie, die zij ondergaat, bij een

willekeurige kleine verplaatsing der moleculen, den arbeid voorstelt, welke bij die verplaatsing verricht wordt. Men kan zich voorstellen, dat de moleculen een weinig zoodanig verschoven worden, dat de richtingen harer assen daarbij niet veranderen. Bij deze virtueele verplaatsing verrichten de koppels geen arbeid en men vindt:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\delta u_\xi + \frac{\partial W}{\partial v_\eta}\delta v_\eta + \frac{\partial W}{\partial w_\zeta}\delta w_\zeta + \frac{\partial W}{\partial u_\eta}\delta(u_\eta + v_\xi) +$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial v_\zeta}(v_\zeta + w_\eta) + \frac{\partial W}{\partial w_\xi}(w_\xi + u_\zeta).$$

Door vergelijking van beide uitdrukkingen voor den arbeid, verkrijgt men voor de spanningen de formules:

$$t_{11} = \frac{\partial W}{\partial u_\xi};\ t_{22} = \frac{\partial W}{\partial v_\eta};\ t_{33} = \frac{\partial W}{\partial w_\zeta};\ t_{12} = \frac{\partial W}{\partial u_\eta};\ t_{23} = \frac{\partial W}{\partial v_\zeta};$$
$$t_{31} = \frac{\partial W}{\partial u_\zeta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

De functie W bestaat uit twee deelen. Het eerste is ontstaan uit de krachten, die op de zwaartepunten der moleculen werken. Zij geeft formules voor de spanningen, welke overeenkomen met die, welke in de gewone theorie, waar de afmetingen der deeltjes verwaarloosd worden, gegeven worden.

Het tweede gedeelte van de functie W hangt van de richtingen af, die de assen der moleculen met de vaste assen vormen. Dit deel der potentiaal, dat door W_1 zal aangeduid worden, is, zooals uit vergelijking (9) volgt, bij de aangenomen onderstellingen omtrent de functie $F(R)$, klein ten opzichte van het eerste gedeelte. De grootheden A_{11}, A_{22} enz. toch, die in W_1 voorkomen, bevatten de eerste en tweede machten der afmetingen van de moleculen. Daarom mogen in W_1 de producten en tweede machten van de grootheden u_ξ, v_η enz. verwaarloosd worden. Worden deze bijkokomende spanningen met τ_{11}, τ_{22}, τ_{33}, τ_{12}, τ_{23} en τ_{31} aangeduid, dan heeft men de formules:

$$\tau_{11} = \frac{\partial W_1}{\partial u_\xi}; \quad \tau_{22} = \frac{\partial W_1}{\partial v_\eta}; \quad \tau_{33} = \frac{\partial W_1}{\partial w_\zeta};$$

$$\tau_{12} = \frac{\partial W_1}{\partial u_\eta}; \quad \tau_{23} = \frac{\partial W_1}{\partial v_\zeta}; \quad \tau_{31} = \frac{\partial W_1}{\partial w_\xi} \quad .. (22)$$

De functie W_1 moet nog bepaald worden. In het algemeen wordt zij zeer samengesteld. Neemt men echter aan, dat alle moleculen in den kubus onderling gelijk zijn, dat haar assen gelijke richtingen hebben en dat zij isotroop gerangschikt zijn, dan wordt vooreerst de potentiaal der krachten, die op een molecule werken, voor zooverre deze functie van de richtingen der assen afhangt $= \Sigma V_2$. Daarin heeft dan ΣV_2 dezelfde beteekenis als in vergelijking (18). Indien n het aantal deeltjes is, dat in den bovengenoemden kubus aanwezig is, wordt:

$$W_1 = \frac{n}{2} \Sigma V_2 .$$

Bij een bepaalden stand der assen van de moleculen, (voor allen denzelfden) wordt dan gevonden:

$$\tau_{11} = \tfrac{1}{2} n \left(B_{11} \alpha^2 + B_{22} \beta^2 + B_{33} \gamma^2\right) \quad .... (23)$$

terwijl τ_{22}, τ_{33} hieruit afgeleid worden, als men α, β en γ vervangt door α_1, β_1 en γ_1 en door α_2, β_2 en γ_2. Ook de uitdrukkingen voor de tangentieële spanningen kunnen door middel van de vergelijkingen (18) en (22) worden opgeschreven.

De kubus op wiens zijvlakken de spanningen bepaald zijn in de onderstelling, dat de assen der moleculen allen onderling evenwijdig zijn, kan een zeer groot aantal werkingssferen bevatten. In elke sfeer hebben wij de moleculen als nagenoeg evenwijdig gericht beschouwd. Zoolang zij niet door den invloed van uitwendige krachten, die op de oppervlakte van het lichaam werken, gewenteld zijn, kan men echter aannemen, dat in den geheelen kubus de assen der moleculen gemiddeld naar alle richtingen gelijkelijk verdeeld zijn.

Om in dien toestand de spanningen τ_{11}, τ_{22} enz. te berekenen, kan men zich een bol geconstrueerd denken, en uit het middelpunt lijnen getrokken, evenwijdig met overeenkomstige assen van de moleculen in het volume-element. De n snijpunten zullen gelijkmatig over de boloppervlakte verspreid liggen. Alle stralen, die met de ξ-as hoeken vormen, welke tusschen de waarden h en $h + dh$ begrepen zijn, snijden een schijf af, waarop $\frac{n}{2} \sin h \,.\, dh$ snijpunten liggen. Hieruit volgt, dat het aantal moleculen, wier x-assen hoeken met de ξ-as maken, die tusschen h en $h + dh$ besloten zijn, gelijk is aan $\frac{n}{2} \sin h \, dh = -\frac{n}{2} d\alpha$, volgens de formules (10). De uitdrukking voor de spanning τ_{11} wordt blijkbaar bepaald, door in de vergelijking (23) α^2 te vermenigvuldigen met: $-\frac{n}{2} d\alpha$, evenzoo β^2 met $-\frac{n}{2} d\beta$ en γ^2 met $-\frac{n}{2} d\gamma$ en vervolgens de geheele uitdrukking tusschen de grenzen $+1$ en -1 te integreeren. Men verkrijgt de waarde:

$$\tau_{11} = \frac{1}{6} n (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Zoekt men op dezelfde manier ook de overige spanningen op het beschouwde oogenblik, zoo zal men vinden:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} \\ \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Na afloop der vormverandering, als de moleculen in stabiel evenwicht gekomen zijn, kunnen de gewijzigde spanningen weder worden berekend. Daar toch op dat oogenblik de assen van de moleculen, zooals wij zagen, met de elasticiteits-assen in elk element samenvallen, kunnen de richtingscosinussen α, β en γ in vergelijking (23) gemakkelijk bepaald worden, als de aard der deformatie gegeven is. De

grootte der verplaatsingen heeft op de bijkomende spanningen bij de eenvoudige hypothesen, die tot nu toe gesteld zijn, geen invloed.

De vergelijkingen ter bepaling van het evenwicht in een veerkrachtig lichaam kunnen gemakkelijk opgesteld worden als de uitwendige krachten, die op de massa en de oppervlakte van het lichaam werken, aangrijpen in de zwaartepunten der moleculen.

De spanningen, die in de gewone elasticiteits-theorie voorkomen, en afhangen van u_ξ, u_η, u_ζ enz. duiden wij verder aan door de letters: t_{11}, t_{22}, t_{33} enz., de bijkomende spanningen, even als boven door τ_{11}, τ_{22}, τ_{33} enz.

De ontbondenen der uitwendige krachten, die op alle punten van het lichaam werken, worden voorgesteld door X, Y en Z. De ontbondenen van de krachten, die in een element van de oppervlakte werken, worden $X_{(0)}$, $Y_{(0)}$, $Z_{(0)}$ genoemd.

Bepaalt men het verschil der spanningen, die op een bepaald oogenblik op de overstaande zijden van een kleinen kubus binnen het lichaam werken, dan vindt men daaruit de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
X+\frac{\partial(t_{11}+\tau_{11})}{\partial\xi}+\frac{\partial(t_{12}+\tau_{12})}{\partial\eta}+\frac{\partial(t_{31}+\tau_{31})}{\partial\zeta}&=0\\
Y+\frac{\partial(t_{12}+\tau_{12})}{\partial\xi}+\frac{\partial(t_{22}+\tau_{22})}{\partial\eta}+\frac{\partial(t_{23}+\tau_{23})}{\partial\zeta}&=0\\
Z+\frac{\partial(t_{31}+\tau_{31})}{\partial\xi}+\frac{\partial(t_{23}+\tau_{23})}{\partial\eta}+\frac{\partial(33+\tau_{33})}{\partial\zeta}&=0
\end{aligned}\right\}\ldots(26^a)$$

Beschouwt men verder een element, dat door de oppervlakte des lichaams begrensd wordt, dan verkrijgt men ter bepaling van het evenwicht aan die oppervlakte de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
X_{(0)}&=(\alpha)_{(0)}(t_{11}+\tau_{11})+(\beta)_{(0)}(t_{12}+\tau_{12})+(\gamma)_{(0)}(t_{31}+\tau_{31})\\
Y_{(0)}&=(\alpha)_{(0)}(t_{12}+\tau_{12})+(\beta)_{(0)}(t_{22}+\tau_{22})+(\gamma)_{(0)}(t_{23}+\tau_{23})\\
Z_{(0)}&=(\alpha)_{(0)}(t_{31}+\tau_{31})+(\beta)_{(0)}(t_{23}+\tau_{23})+(\gamma)_{(0)}(t_{33}+\tau_{33})
\end{aligned}\right\}.(26^b)$$

Hierin zijn $(\alpha)_{(0)}$, $\beta_{(0)}$ en $\gamma_{(0)}$ de cosinussen der hoeken, die de normaal van het element der oppervlakte (naar buiten gericht) met de coördinaat-assen maakt. Voor de spanningen aan de oppervlakte mogen de uitdrukkingen worden genomen, welke voor de spanningen binnen het lichaam gevonden zijn, als men aanneemt, dat de uitwendige krachten $X_{(0)}$, $Y_{(0)}$ en $Z_{(0)}$ zich uitstrekken tot moleculen, welke op een afstand, gelijk aan den straal der werkingssfeer, van de oppervlakte gelegen zijn. Aan de oppervlakte zelf heeft namelijk de functie W niet dezelfde waarde als binnen het lichaam.

Behalve de genoemde voorwaarden is voor het evenwicht nog noodig, dat de moleculen niet om haar zwaartepunten wentelen. Daar bij het evenwicht de assen van alle moleculen in het ruimte-element van het lichaam als evenwijdig kunnen beschouwd worden, heeft men nog in een isotroop lichaam de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial W_1}{\partial \varphi} = 0, & \dfrac{\partial W_1}{\partial \psi} = 0, & \dfrac{\partial W_1}{\partial \theta} = 0 \\ \text{met de voorwaarden:} & \dfrac{\partial^2 W_1}{\partial \varphi^2} < 0 \text{ en } & \dfrac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} < 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26^c)$$

als het evenwicht stabiel zal zijn. De hoeken zijn dezelfden, die in het laatst der vorige paragraaf werden ingevoerd. W_1 heeft dezelfde beteekenis als in de vergelijkingen (22).

De evenwichtsvergelijkingen kunnen ook uit het beginsel afgeleid worden, dat de arbeid, die bij een kleine verplaatsing en wenteling der moleculen verricht wordt, bij het evenwicht verdwijnen moet. Zij dO het element der oppervlakte en dS een element van het volume van een isotroop lichaam, dan moet voldaan worden aan de voorwaarde:

$$\delta \left\{ \int (u X + v Y + w Z)\, dS + \right.$$
$$\left. + \int (u X_{(0)} + v Y_{(0)} + w Z_{(0)})\, dO - \int W dS \right\} = 0.$$

Neemt men in aanmerking, dat hier:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\delta u_\xi + \frac{\partial W}{\partial v_\eta}\delta v_\eta + \frac{\partial W}{\partial w_\zeta}\delta w_\zeta + \frac{\partial W}{\partial u_\eta}\delta(u_\eta + v_\xi) +$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial v_\zeta}\delta(v_\zeta + w_\eta) + \frac{\partial W}{\partial w_\xi}\delta(w_\xi + u_\zeta) + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial W}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial W}{\partial \theta}\delta\theta$$

is en dat:

$$\int \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\delta u_\xi \, dS = +\int (\alpha)_0 \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\delta u \, dO - \int \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \, \partial u_\xi}\delta u \, dS$$

is, dan vindt men, na een dergelijke herleiding van alle termen en door vervolgens de grootheden afzonderlijk $= 0$ te stellen, die in de integraal, welke over den geheelen inhoud van het lichaam uitgestrekt wordt, met δu, δv, δw, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ en $\delta\theta$ vermenigvuldigd zijn, de vergelijkingen (26^a) en (26^c) terug. Stelt men alle grootheden, welke in de integraal, die over de oppervlakte genomen wordt, met δu, δv en δw vermenigvuldigd zijn, ook $= 0$, dan verkrijgt men weêr de vergelijkingen (26^b). Men ziet ook bij deze berekening, dat de spanningen werkelijk de waarden hebben, welke in de formules (21) zijn aangegeven.

§ 8. Als de moleculen van een lichaam ten opzichte van elkaâr verschoven worden, zullen zij volgens de bovenstaande beschouwingen tevens wentelen en moeten de spanningen daarbij veranderen.

Indien dus gedurende de wenteling de vormverandering van het lichaam een standvastige waarde zal behouden, moeten de uitwendige krachten, die op het lichaam werken, een wijziging ondergaan.

Proefondervindelijke bepalingen hierover zijn door F. Kohlrausch *) gedaan. Hij heeft het moment van torsie waargenomen, dat noodig was, om aan een draad een standvastige wringing te geven en de verandering, die dat moment ondervond, nauwkeurig gemeten.

---

*) Poggendorff's *Annal.* CXIX. p. 337.

Als daarentegen het lichaam aan den invloed van standvastige uitwendige krachten onderworpen blijft, zal zoolang de richting der moleculen verandert, ook de vormverandering gewijzigd worden.

De veerkrachtige nawerking wordt, wat den aard van het verschijnsel aangaat, dus door de meegedeelde theorie verklaard. Ook de vormveranderingen, die men bij gemagnetiseerde lichamen heeft opgemerkt, zijn in de theorie begrepen, als men van het beginsel van WEBER uitgaat, dat het magnetiseeren in een verandering der richting van moleculair-magneten bestaat. Immers is de onderstelling, dat de moleculen als kleine magneten te beschouwen zijn, als een bijzonder geval in de gegeven formules opgesloten.

Wij zullen nu de deformatie van een *isotropen* cilinder, waarvan de as evenwijdig met de ζ-as worde aangenomen, nader onderzoeken. Ondersteld wordt, dat de zwaartepunten der moleculen de verschuivingen ondergaan, die bij het vraagstuk van de Saint-Venant *) gevonden worden, waarbij de evenwichtstoestand onderzocht werd van een cilinder, die aan het eene uiteinde bevestigd is, terwijl op het andere eindvlak zoodanige krachten werken, dat elementen, evenwijdig aan de as geen zijdelingsche drukking op elkander uitoefenen.

Als geen uitwendige krachten op de massa van den cilinder aangrijpen, en de moleculen eenigen tijd noodig hebben om de wenteling te volbrengen, (waarvan de oorzaak in § 11 nader zal besproken worden), zullen de verschuivingen op het eerste oogenblik voldoen aan de vergelijkingen (26^a) en (26^b), mits op den mantel van den cilinder in elk element de krachten:

$$X_{(0)} = -(\alpha)_{(0)}\,\tau_{11} \text{ en } Y_{(0)} = -(\beta)_{(0)}\,\tau_{22}$$

aangebracht gedacht worden. Voor die spanningen moeten dan natuurlijk de waarden ingevoerd worden, die in de vergelijking (25) zijn aangegeven.

---

*) *Mémoires des savants étrangers*, T. XIV. *Journal de Liouville*, 2 T. I.

Aan de vergelijkingen (26^c) wordt echter niet voldaan; de moleculen draaien tot dat zij in bepaalde, van de vormverandering afhangende richtingen tot rust komen.

Gedurende deze beweging echter zullen de richtingscosinussen α, β, γ enz., van welke op een willekeurig oogenblik de bijkomende spanningen afhangen, functiën van de coördinaten zijn. Uit (26^a) en (26^b) ziet men, dat het evenwicht van de zwaartepunten der moleculen niet kan blijven bestaan, wanneer niet in het algemeen op elk element van het lichaam krachten X, Y en Z worden aangebracht, die gedurende de wenteling der deeltjes elk oogenblik veranderen. Ook de uitwendige krachten, die op het grondvlak en op den mantel van den cilinder aangrijpen, moeten voortdurend gewijzigd worden. Men ziet hieruit, dat als een cilinder aan het eene uiteinde bevestigd is, en aan het andere b. v. om een standvastigen hoek getordeerd wordt gehouden, de moleculen, zoolang zij wentelen, niet in evenwicht blijven. Op de uitwendige krachten, die noodig zouden zijn, volgens het zooeven gezegde, om deze bewegingen tegen te houden, en die wij voorloopig als aanwezig denken, komen wij nader terug.

De elasticiteits ellipsoïde is bij dit probleem overgegaan in een ellips, waarvan de normaal loodrecht op de ζ-as staat en met de ξ-as een hoek maakt, die bepaald wordt door de formule:

$$tang\, p = -\frac{t_{31}}{t_{23}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

De hoofdspanningen nemen de waarden aan:*)

$$S_1 = \frac{t_{33}}{2} + \sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + \frac{t_{33}^2}{4}};$$

$$S_2 = \frac{t_{33}}{2} - \sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + \frac{t_{33}^2}{4}} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

---

*) Zie o. a. CLEBSCH. *Theorie der Elasticität fester Körper*, p. 130.

De cosinussen der hoeken, welke deze krachten met de coördinaat-assen vormen, zijn gegeven door de uitdrukkingen:

$$\cos p_1 = \frac{t_{31}}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S^2}}; \qquad \cos q_1 = \frac{t_{23}}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S^2}};$$

$$\cos r_1 = \frac{S}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

als daarin achtereenvolgens S_1 en S_2 in plaats van S worden gesteld. Zij nu in de eerste plaats:

$$u = -\mu a \xi + b \eta \zeta; \quad v = -\mu a \eta - b \xi \zeta; \quad w = a \zeta \ldots \quad (30)$$

Deze waarden gelden, als de cilinder een cirkelvormige doorsnede heeft en gelijktijdig in de richting zijner as gespannen en om die as getordeerd wordt. Hieruit leidt men af:

$$t_{12} = 0; \qquad t_{33} = Ea; \qquad t_{31} = \frac{Eb}{2(1+\mu)}\eta;$$

$$t_{23} = -\frac{Eb}{2(1+\mu)}\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

waarin E de elasticiteits-modulus van den isotropen cilinder beteekent. Uit (27) volgt:

$$\tan g\, p = \frac{\eta}{\xi}$$

Als de deeltjes in den stabielen evenwichtsstand gekomen zijn, en als ondersteld wordt, dat $B_{11} > B_{22} > B_{33}$ is, moeten de y-assen samenvallen met de normalen der elasticiteits-ellipsen. Daarom moet volgens de formules (10) $\beta_2 = 0$ zijn, terwijl verder $\frac{\eta}{r} = \beta_1$ en $\frac{\xi}{r} = \beta$ is, wanneer $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ gesteld wordt. Nu worden voor de bijkomende spanningen in dien toestand van het lichaam de waarden gevonden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\tau_{11}'}{n} &= \tfrac{1}{2}(B_{11}\,\alpha^2 + B_{22}\,\beta^2 + B_{33}\,\gamma^2)\\
\frac{\tau_{22}'}{n} &= \tfrac{1}{2}(B_{11}\,\alpha_1{}^2 + B_{22}\,\beta_1{}^2 + B_{33}\,\gamma_1{}^2)\\
\frac{\tau_{33}'}{n} &= \tfrac{1}{2}(B_{11}\,\alpha_2{}^2 + B_{33}\,\gamma_2{}^2)\\
\frac{\tau_{21}'}{n} &= 0\\
\frac{\tau_{31}'}{n} &= C_{11}\,\alpha\,\alpha_2 + C_{33}\,\gamma\,\gamma_2 + C_{12}\,\alpha_2\,\beta +\\
&\quad + C_{13}(\alpha\,\gamma_2 + \alpha_2\,\gamma) + C_{23}\,\beta\,\gamma_2\\
\frac{\tau_{23}'}{n} &= C_{11}\,\alpha_1\,\alpha_2 + C_{33}\,\gamma_1\,\gamma_2 + C_{12}\,\alpha_2\,\beta_1 +\\
&\quad + C_{13}(\alpha_1\,\gamma_2 + \alpha_2\,\gamma_1) + C_{23}\,\beta_1\,\gamma_2
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (32)$$

De spanning τ_{12}' verdwijnt hier, omdat $u_\eta + v_\xi = 0$ is. Voor de richtingscosinussen moeten de waarden in de plaats worden gesteld, die in de vergelijkingen (29) voorkomen na substitutie van (31). Daarbij ziet men vooreerst, dat de componenten der uitwendige krachten, die op een willekeurig punt binnen het lichaam moeten werken, om het oorspronkelijk evenwicht in stand te houden zijn:

$$X = -\frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \xi}$$

$$Y = -\frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \eta}$$

$$Z = -\frac{\partial \tau_{31}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_{23}'}{\partial \eta}.$$

De som der momenten dezer krachten ten opzichte van de as des cilinders is:

$$\int (X\eta - Y\xi)\,dq$$

wanneer dq het element der doorsnede van het lichaam is.

Daar echter τ_{11}' en τ_{22}', zoowel uit (32) gemakkelijk blijkt, even functiën van ξ en η zijn en dus X een oneven functie van ξ en Y een oneven functie van η is, zal het moment, omdat de cilinder cirkelvormig is, verdwijnen. Het moment van torsie is, zoolang de moleculen nog willekeurig gericht zijn,

$$M\zeta = \frac{Eb}{4(1+\mu)} \pi \varrho^4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

wanneer ϱ den straal der doorsnede voorstelt.

Wanneer de moleculen in stabiel evenwicht gekomen zijn, is er nog een moment:

$$M'\zeta = \int (\tau_{31}' \eta - \tau_{23}' \xi)\, dq.$$

Substitueert men hierin de waarden van τ_{31}' en τ_{23}' uit vergelijking (32), dan heeft men vooreerst:

$$C_{11} n \int (\alpha \alpha_2 \eta - \alpha_1 \alpha_2 \xi)\, dq = C_{11} n \int \alpha_2 \frac{\frac{Eb}{2(1+\mu)} r^2}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_1^2}} dq =$$

$$= \tfrac{1}{2} C_{11} n \frac{Eb}{(1+\mu)} \int \frac{S_1 r^2 dq}{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_1^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2} C_{11} n \frac{b}{(1+\mu)} \int \frac{r^2 dq}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2 + a^2}}.$$

Evenzoo is:

$$C_{33} n \int (\gamma \gamma_2 \eta - \gamma_1 \gamma_2 \xi)\, dq = -\tfrac{1}{2} C_{33} n \frac{b}{1+\mu} \int \frac{r^2 dq}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2 + a^2}}.$$

Verder is:

$$C_{12} n \int (\alpha_2 \beta \eta - \alpha_2 \beta_1 \xi)\, dq = 0$$

$$C_{23} n \int (\beta \gamma_2 \eta - \gamma_2 \beta_1 \xi)\, dq = 0$$

$$n\,C_{13}\int(\alpha\gamma_2\eta-\alpha_1\gamma_2\xi)\,dq\;=$$

$$=\tfrac{1}{2}n\,C_{13}\frac{bE}{(1+\mu)}\int\frac{r^2\,S_2\,dq}{\sqrt{(t_{31}^2+t_{23}^2+S_1^2)(t_{31}^2+t_{23}^2+S_2^2)}}$$

$$n\,C_{13}\int(\alpha_2\gamma\eta-\alpha_2\gamma_1\xi)\,dq\;=$$

$$=\tfrac{1}{2}n\,C_{13}\frac{bE}{(1+\mu)}\int\frac{r^2\,S_1\,dq}{\sqrt{(t_{13}^2+t_{23}^2+S_1^2)(t_{31}^2+t_{23}^2+S_2^2)}}$$

De som dezer laatste twee termen neemt een eenvoudige gedaante aan, als men in acht neemt, dat:

$$S_1+S_2=Ea$$

en

$$\sqrt{(t_{31}^2+t_{23}^2+S_1^2)(t_{31}^2+t_{23}^2+S_2^2)}\;=$$

$$=\frac{E^2\,b}{2\,(1+\mu)}\,r\sqrt{a^2+\frac{b^2}{(1+\mu)^2}r^2}$$

is.

Men vindt eindelijk:

$$M'\zeta=\tfrac{1}{2}n\,(C_{11}-C_{33})\frac{b}{(1+\mu)}\int\frac{r^2\,dq}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2}r^2+a^2}}+$$

$$+\;n\,C_{13}\,a\int\frac{r\,dq}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2}r^2+a^2}}\;\ldots\ldots\ldots\;(34)$$

Bij de onderstellingen, die aanleiding geven tot de vergelijking (13) verdwijnen, zooals in § 6 werd opgemerkt de coëfficiënten C_{12}, C_{13} en C_{23}; de moleculen kunnen dan ook, zooals daar bewezen werd, nog als kleine magneten worden beschouwd. Men ziet dan gemakkelijk in, dat de volstrekte waarde van $M'\zeta$ een maximum is, wanneer $a=0$ is, dus wanneer de torsie niet samengesteld is met een spanning volgens de as van den cilinder. In dat geval vindt men:

$$M'\zeta = \frac{n\,(C_{11} - C_{33})}{3}\,\pi\,\varrho^3.$$

In het bijzondere geval, dat de vergelijking (20) geldt, wordt deze formule:

$$M'\zeta = -\frac{n\,(A_1 - C_1)}{3}\,(T + T'')\,\pi\,\varrho^3\,.$$

Dit moment is met $M\zeta$ tegengesteld gericht, wanneer de coëfficiënt $(T + T'')$ een positieve waarde heeft, want bij de bovenstaande herleiding is in deze onderstelling aangenomen, dat $A_1 > B_1 > C_1$ is. Nam men echter aan, dat $A_1 < B_1 < C_1$ ware, dan zou in plaats van de x-as, de z-as van iedere molecule de richting der spanning S_1 hebben. Men zou in de laatste formule A_1 en C_1 met elkaâr moeten verwisselen en het teeken van het moment $M'\zeta$ zou niet veranderen.

Bij de proeven van F. Braun *) is gebleken, dat de nawerking, die bij de torsie optreedt, door een daarop volgende spanning volgens de as van den cilinder steeds vermindert, moge die spanning positief of negatief zijn, d. w. z. moge zij een uitrekking of samendrukking veroorzaken.

Bovenstaande berekening is evenzeer van toepassing, als de spanning en de torsie op elkaâr volgen en als zij gelijktijdig plaats hebben. De eind-toestand van den cilinder moet dan namelijk volgens de theorie dezelfde zijn. De theorie is in het eerste geval in overeenstemming met de waarnemingen, bij de hypothesen, die voor C_{13} de waarde nul of ten opzichte van $C_{11} - C_{33}$ een zeer geringe waarde opleveren. Wel zijn de uitkomsten der waarneming en der berekening niet onmiddellijk gelijk te stellen, daar de grootte der nawerking door Braun bepaald werd uit de verplaatsing van het uiteinde van den draad, die na opheffing der krachten overbleef, maar zij zijn toch met elkaâr in overeenstemming.

Uit de theorie zou ook volgen, dat als een cilinder gelijktijdig aan een torsie en aan een spanning volgens de as

*) Pogg. *Annal.* CLIX. p. 372.

onderworpen werd, het moment $M'\zeta$ ook kleiner zou wezen dan zonder de spanning. Dit is echter niet in overeenstemming met de uitkomsten der proeven van BRAUN. Hij vond in een groot aantal gevallen, dat de nawerkingen, door een gelijktijdige torsie en spanning ontstaan, elkander versterken.

Er zijn meer feiten, waarvan de theorie, zooals zij tot nu toe voorgesteld is, geen rekenschap geeft. Vooreerst zou de nawerking onafhankelijk van de intensiteit der vormverandering zijn, terwijl zij er werkelijk mee evenredig is. Ten tweede zouden, na opheffing der krachten, de moleculen in de nieuwe standen blijven. Van een nawerking zou daarna geen sprake zijn.

In § 10 zal aangetoond worden, dat als het lichaam binnen een werkingssfeer niet isotroop ondersteld wordt, men uitkomsten verkrijgt, die beter met de waarnemingen overeenkomen.

Wat het verschil betreft tusschen een gelijktijdige en op elkaâr volgende werking van krachten in verschillende richtingen, dit kan door een weerstand verklaard worden, die de wenteling der moleculen verhindert, zooals in § 12 nader zal besproken worden.

Wanneer men in bovenstaande formules de spanning laat verdwijnen, vindt men $\alpha_2^2 = \frac{1}{2}$ en $\gamma_2^2 = \frac{1}{2}$, dus:

$$\tau_{33}' = \frac{1}{4}\, n\,(B_{11} + B_{33}).$$

Vergelijkt men deze waarde met degene, die τ_{33} bij de natuurlijke rangschikking der moleculen had, dan vindt men:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{1}{12}\, n\,\{(B_{11} - B_{22}) + (B_{33} - B_{22})\}.$$

Als men daarentegen in dezelfde formules de torsie doet verdwijnen, zal (altijd in de onderstelling $B_{11} > B_{22} > B_{33}$) de x-as van ieder deeltje evenwijdig worden met de ζ-as, zoodat men dan heeft: $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_2 = 0$ terwijl β, γ, β_1, γ_1 alle waarden tusschen -1 en 1 kunnen aannemen. Na een kleine herleiding wordt dan gevonden:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{1}{6} n \left\{ (B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \right\}.$$

Zoowel bij de torsie als bij de lengte-spanning heeft dus een nawerking volgens de as van den cilinder plaats, terwijl in het laatste geval het moment M'_ζ nul is. Bij de torsie is het teeken van $\tau_{33}' - \tau_{33}$ afhankelijk van de gedaante der moleculen; in het geval, dat alleen de spanning bestaat, niet. Indien namelijk $B_{11} < B_{22} < B_{33}$ ware, zou de z-as van een molecule met de as van den cilinder evenwijdig zijn en daarom moest dan $\alpha_2 = 0$ en $\gamma_2 = 1$ wezen; men vindt daarbij:

$$\tau_{33}' = \tau_{33} = -\frac{1}{6} n \left\{ (B_{11} - B_{33}) + (B_{22} - B_{33}) \right\}.$$

Wanneer nu, zooals in § 6 ondersteld werd, de grootheden B positief zijn, moet de uitwendige kracht op het grondvlak van den cilinder, die $\tau_{33}' - \tau_{33}$ opheft, negatief zijn en zal dus de spankracht, die de vormverandering heeft doen ontstaan, afnemen. De grootte der nawerking is in beide gevallen niet dezelfde. Wat de spanningen betreft aan de oppervlakte van den cilinder, verkrijgt men, als er geen torsie is, uit de gegeven formules:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \tau_{22}' - \tau_{22} = -\frac{1}{12} n \left\{ (B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \right\}.$$

Beschouwen wij nog de buiging in het $\xi\zeta$-vlak van een cilinder, waarvan de doorsnede symmetrisch is ten opzichte van de η- en de ξ-assen. Men vindt (zie het genoemde werk van Clebsch, p. 87):

$$t_{31} = \frac{E b_1}{2(1+\mu)} \left[-\frac{\mu \xi^2 - (2-\mu)\eta^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \right],$$

$$\left. \begin{aligned} t_{23} &= \frac{E b_1}{2(1+\mu)} \left[-(\mu+2)\xi\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \\ t_{33} &= E\xi(a_1 + b_1\zeta) \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots (35)$$

a_1 en b_1 zijn standvastige grootheden, P is een functie, die van den vorm der doorsnede afhangt en wel een oneven functie van ξ en een even functie van η. Daardoor wordt t_{31} een even functie van ξ en van η, en t_{23} een oneven functie van beide. Als de moleculen in standvastig evenwicht gekomen zijn, vindt men α en γ uit de formule voor $\cos p_1$ in de vergelijkingen (29). Men ziet, dat zij even functiën van η zijn, want in den noemer komen slechts even machten van deze veranderlijke voor. Evenzoo ziet men, dat α_1 en γ_1 oneven functiën daarentegen α_2 en γ_2 even functiën van η zullen wezen. Uit vergelijking (27) volgt, dat β een oneven en β_1 een even functie is.

Wanneer X_e, Y_e en Z_e de ontbondenen der kracht zijn, die op het grondvlak van den cilinder moet werken, tengevolge van de nawerking, om de vormverandering een standvastige waarde te doen behouden, ziet men, dat bij de meest algemeene onderstelling, deze ontbondenen geen van allen verdwijnen.

Men heeft namelijk de formules:

$$X_e = -\int \tau_{31}' \, dq; \quad Y_e = -\int \tau_{23}' \, dq; \quad Z_e = -\int \tau_{33}' \, dq.$$

Bij de bijzondere onderstellingen echter, die tot vergelijking (13) aanleiding gaven, waardoor de coëfficiënten C_{12}, C_{13} en C_{23} verdwijnen, wordt: $Y_e = 0$. Zijn verder $M'\xi$, M'_η en $M'\zeta$ de componenten van het koppel, dat door de bijkomende spanningen moet werken, dan zijn, als de lengte van den cilinder l genoemd wordt:

$$M'\xi = \int (\tau_{23}' l - \tau_{33}' \eta) \, dq; \quad M'\zeta = \int (\tau_{31}' \eta - \tau_{23}' \xi) \, dq;$$

$$M'_\eta = \int (\tau_{23}' \xi - \tau_{31}' l) \, dq.$$

Alleen bij de bepaalde onderstellingen, die zooeven genoemd werden, worden $M'\xi$ en $M'\zeta$ nul. Dit onderzoek leert, dat dan, overeenkomstig met de waarnemingen van Braun, de buiging in een hoofdvlak geen nawerking in een ander hoofdvlak en geen torsie-nawerking zou tengevolge hebben.

Daarentegen zal de nawerking, die in een hoofdvlak bestaat, zooals bij de proeven ook gevonden werd, door de buiging in een ander vlak en in het algemeen door de vormverandering in een andere richting gewijzigd worden. Het is uit bovenstaande theorie eenvoudig genoeg af te leiden. Wordt de doorsnede van den cilinder als zeer klein aangenomen, dan kunnen in (35) de spanningen t_{31} en t_{23} verwaarloosd worden. Bij de samenstelling van een torsie om de as van den cilinder en van deze buiging wordt een vergelijking gevonden, die van (34) alleen daarin verschilt, dat voor a in de plaats wordt geschreven: $a_1 \xi$. Even als daar, volgt ook hier, dat $M'\zeta$ bij dezelfde onderstelling een maximum is. Een nawerking dus, die door torsie wordt opgewekt, zou dan door een daarop volgende buiging verminderen, zooals door de waarnemingen aangetoond werd. Bij de resultaten, die uit vergelijking (35) zijn verkregen, werden de spanningen aan de oppervlakte van den cilinder en de krachten, die op al zijn punten, na de wenteling der moleculen, moeten werken, om de vormverandering constant te houden, verwaarloosd. De krachten, die op den mantel moeten werken, zijn:

$$X_{(0)} = \tau_{11}' \cos n$$
$$Y_{(0)} = \tau_{22}' \sin n$$
$$Z_{(0)} = \tau_{31}' \cos n + \tau_{23}' \sin n;$$

waarin n de hoek is, dien de normaal aan het oppervlakte-element met de ξ-as maakt. Nu is blijkbaar $\cos n$ een even functie van η en $\sin n$ een oneven functie. Berekent men dus de momenten dezer krachten ten opzichte van de coördinaat-assen, zoo ziet men, dat zij geen verandering brengen in het boven verkregen resultaat.

De krachten, die binnen den cilinder op eenig punt moeten werken, zijn:

$$X = -\frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \xi}; \quad Y = -\frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \eta};$$
$$Z = -\frac{\partial \tau_{13}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_{23}'}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau_{33}'}{\partial \zeta}.$$

Daar het differentiaal-quotient van een even functie oneven en omgekeerd is, kunnen de momenten, die deze krachten uitoefenen, ook geen verandering in de uitkomst brengen. Als men dus die krachten niet aanbrengt, zullen de moleculen zich wel ten opzichte van elkaâr verplaatsen, maar overigens blijft bovenstaande beschouwing van toepassing.

§ 9. In de vorige § werd ondersteld, dat u, v en w gegeven waren en werden de krachten berekend, die noodig waren, om ze te doen ontstaan en in stand te houden. Veel moeilijker is het omgekeerde probleem op te lossen; de verschuivingen te bepalen, die door de werking van gegeven krachten in een lichaam ontstaan en de veranderingen te berekenen, die zij door de wenteling der moleculen moeten ondergaan.

Slechts in een enkel geval zal dit vraagstuk bij een isotroop cilindervormig lichaam worden opgelost.

Vooreerst wordt ondersteld, dat op het gebogen oppervlak geen krachten werken. Dit geeft, volgens de vergelijkingen (26^b) de voorwaarden:

$$(\alpha)_0\,(t_{11} + \tau_{11}) + (\beta)_0\,(t_{12} + \tau_{12}) = 0$$
$$(\alpha)_0\,(t_{12} + \tau_{12}) + (\beta)_0\,(t_{22} + \tau_{22}) = 0$$
$$(\alpha)_0\,(t_{13} + \tau_{13}) + (\beta)_0\,(t_{23} + \tau_{23}) = 0\,.$$

Hieraan wordt voldaan, als men stelt:

$$t_{11} = -\tau_{11}\,;\quad t_{22} = -\tau_{22}\,;\quad t_{12} = -\tau_{12}\,;$$
$$t_{31} = -\tau_{31}\,;\quad t_{23} = -\tau_{23}\,.$$

Op het grondvlak werkt in de richting van de as van den cilinder een kracht, die een verlenging in die richting veroorzaakt, en die gelijkmatig over de doorsnede verdeeld gedacht wordt. Haar grootte op de eenheid van oppervlak zij Z_1. Aan de vergelijkingen (26) kan nu worden voldaan, als men aanneemt, dat:

$$u = P\xi;\quad v = P\eta \text{ en } w = Q\zeta \;\ldots\ldots\; (36)$$

is, waarin P en Q nog onbepaalde grootheden zijn. Daar

de richtingscosinussen hier blijkbaar alleen functiën van den tijd, niet van de coördinaten zullen wezen, is reeds aan de eerste drie vergelijkingen (26) voldaan, mits op het inwendige van den cilinder geen krachten aangrijpen. De voorwaarden aan de oppervlakte en aan het grondvlak van den cilinder zijn:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E}{(1+\mu)}\left(u_\xi+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta\right)=\tfrac{1}{2}n\,(B_{11}\alpha^2+B_{22}\beta^2+B_{33}\gamma^2)\\
&\frac{E}{(1+\mu)}\left(v_\eta+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta\right)=\tfrac{1}{2}n\,(B_{11}\alpha_1{}^2+B_{22}\beta_1{}^2+B_{33}\gamma_1{}^2)\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}(u_\eta+v_\xi)=n\,[C_{11}\,\alpha\alpha_1+C_{22}\,\beta\beta_1+C_{33}\,\gamma\gamma_1+\\
&\quad+C_{12}(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)+C_{13}(\alpha\gamma_1+\alpha_1\gamma)+C_{23}(\beta\gamma_1+\beta_1\gamma)]\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}(w_\xi+u_\zeta)=n\,[C_{11}\,\alpha\alpha_2+C_{22}\,\beta\beta_2+C_{33}\,\gamma\gamma_2+\ldots]\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}(v_\zeta+w_\eta)=n\,[C_{11}\alpha_1\alpha_2+C_{22}\beta_1\beta_2+C_{33}\gamma_1\gamma_2+\ldots]\\
&-Z_1+\frac{E}{(1+\mu)}\left(w_\zeta+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta\right)=\tfrac{1}{2}n(B_{11}\alpha^2{}_2+B_{22}\beta_2{}^2+B_{33}\gamma_2{}^2)
\end{aligned}\right\}\ldots(37)$$

De spanningen t_{11}, t_{22} enz. zijn hier (zie o. a. Clesch p. 48) in functiën van de verschuivingen uitgedrukt; $\delta = u_\xi + v_\eta + w_\zeta$. Als de moleculen in standvastig evenwicht gekomen zijn, zullen de x-assen (bij de onderstelling: $B_{11} > B_{22} > B_{33}$) evenwijdig met ζ-as de y- en z-assen willekeurig gericht zijn. De vergelijkingen (37) gaan over in:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E}{(1+\mu)}\left\{P+\frac{\mu}{1-2\mu}(2P+Q)\right\}=\tfrac{1}{4}n\,(B_{22}+B_{33})\\
&-Z_1+\frac{E}{(1+\mu)}\left\{Q+\frac{\mu}{1-2\mu}(2P+Q)\right\}=\tfrac{1}{2}n\,B_{11}
\end{aligned}\right\}\ldots(38)$$

De overige vergelijkingen vallen weg. Door oplossing van P en Q wordt gevonden:

$$P = \frac{-\mu Z_1 + \frac{1}{4} n \{ (1-\mu)(B_{22} + B_{33}) - 2\mu B_{11} \}}{E}$$

$$Q = \frac{Z_1 + \frac{1}{2} n \{ B_{11} - \mu (B_{22} + B_{33}) \}}{E}.$$

Op het oogenblik, dat de moleculen nog gelijkelijk naar alle richtingen om een punt voorkomen, moet men voor de tweede leden der vergelijkingen (38) in de plaats schrijven $\frac{1}{6} n (B_{11} + B_{22} + B_{33})$. Dan wordt aan de vergelijkingen (26^a) en (26^b), maar niet aan (26^c) voldaan. Worden de waarden, die P en Q op dat oogenblik annemen P_1 en Q_1 genoemd, dan wordt:

$$\left.\begin{aligned} P - P_1 &= -\frac{1}{12} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \} \\ Q - Q_1 &= \frac{1}{6} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ (B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \} \end{aligned}\right\} \ldots (39)$$

Deze verschillen bepalen de verschuivingen volgens de as en volgens de doorsnede van den cilinder ten gevolge van de wenteling der moleculen. Men ziet, dat de cilinder onder den invloed eener spankracht volgens de as, bij de onderstellingen, die ingevoerd zijn, in lengte zal toenemen. Men kan gemakkelijk aantoonen, dat deze uitkomst onafhankelijk is van den vorm der moleculen, wat de teekens van $P - P_1$ en van $Q - Q_1$ betreft. Wanneer de cilinder samengedrukt in plaats van uitgerekt werd, zou de z-as van elke molecule evenwijdig met de ζ-as gericht worden. Bij stabiel evenwicht zouden daardoor de tweede leden van vergelijking (38) veranderen in: $\frac{1}{4} n (B_{11} + B_{22})$ en $\frac{1}{2} n B_{33}$. De grootheden, die de nawerking bepalen, worden nu:

$$\left.\begin{aligned} P - P_1 &= \frac{1}{12} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ B_{11} - B_{33}) + (B_{22} - B_{33}) \} \\ Q - Q_1 &= -\frac{1}{6} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ B_{11} - B_{33}) + (B_{22} - B_{33}) \} \end{aligned}\right\} \ldots (40)$$

De nawerking bij de samendrukking heeft wel het tegengestelde teeken maar in het algemeen niet dezelfde grootte als die bij de uitrekking. Proeven hierover zijn mij niet bekend.

§ 10. In een lichaam, dat binnen een werkingssfeer niet als isotroop kan beschouwd worden, een onderstelling, die zooals in § 5 werd opgemerkt, bij een willekeurige gedaante der moleculen wel de meest waarschijnlijke is, werken op ieder deeltje twee koppels. Het eene is evenredig met de grootheden: u_ξ, v_η, w_ζ enz.; het andere hangt af van de rangschikking der moleculen in den natuurlijken toestand van het lichaam. Stelt men de ontbondenen der koppels volgens de assen aan elkander gelijk, dan vindt men vergelijkingen, waaruit de richtingen der assen bij het evenwicht kunnen bepaald worden. De spanning in een punt van het lichaam en de verandering daarvan bij standvastige vormverandering kan dan volgens de formules (22) berekend worden. In het algemeen is deze berekening zeer samengesteld. Om een eenvoudig voorbeeld te geven, worden de volgende onderstellingen ingevoerd:

1°. De moleculen zijn symmetrisch rondom een as. Deze onderstelling wordt slechts ingevoerd ter bekorting der berekeningen. Zij zal bij benadering kunnen worden aangenomen, als één as aanmerkelijk verschilt van de beide anderen.

2°. De rangschikking der moleculen in een werkingssfeer is symmetrisch ten opzichte eener as.

3°. De afwijking van een isotrope rangschikking is zoo gering, dat zij verwaarloosd kan worden in het koppel, dat evenredig is met de vormverandering. Deze hypothese werd reeds in § 5 nader onderzocht.

Het lichaam zij weder een cilinder, waarin dezelfde coördinaat-assen worden aangenomen, als in de vorige paragraaf. De vormverandering zij een verlenging volgens de as, zoodat:

$$u_\xi = -\mu a; \quad v_\eta = -\mu a \text{ en } w_\zeta = a$$

is.

Om het koppel, dat evenredig met de vormverandering

is, te berekenen, kan men uitgaan van een der vergelijkingen (18) en (20). Wel is de laatste een bijzonder geval van de eerste, maar bij de hier ingevoerde onderstellingen, komen de berekeningen op hetzelfde neer. Hier zijn de uitkomsten uit (20) afgeleid; men behoeft slechts voor de grootheden A_1 B_1 T enz. andere waarden in de plaats te stellen, om de resultaten te vinden, die (18) oplevert.

Stellen wij nu in vergelijking (20) $B_1 = C_1$, volgens de eerste hypothese, dan wordt bij de aangenomen vormverandering:

$$- \Sigma V_2 = (2T + T' - T'') \{(A_1 - B_1)\, \alpha_2^2 (w\zeta - u\xi) + \\ + A_1 u\xi + B_1 (u\xi + w\zeta)\}.$$

En dus, wanneer $-(2T + T' - T'') = D_1$ en $\alpha_2 = \cos\varphi$ worden gesteld, waarbij φ de hoek is tusschen de x-as der molecule en de ζ-as van den cilinder:

$$\Sigma V_2 = D_1\, a\, \{(A_1 - B_1)(1 + \mu) \cos^2\varphi - A_1\, \mu + B_1 (1 - \mu)\}.$$

Het gezochte koppel wordt, volgens de opmerking, die in § 5 gemaakt is:

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \varphi} = -\tfrac{1}{2} (A_1 - B_1)\, D_1\, a\, (1 + \mu) \sin 2\varphi.$$

Door dit koppel wordt de molecule gewenteld in een vlak, dat door haar hoofdas en de richting der ζ-as gaat.

Het terugwerkend koppel kan op dezelfde wijze uit de vergelijking (14) worden afgeleid. Indien men in die vergelijking de coördinaten der zwaartepunten ten opzichte van de hoofdassen der werkingssfeer bepaalt, vindt men met het oog op de tweede onderstelling dezer §:

$$\Sigma V_1 = (A_1 - B_1)(\alpha_2')^2 (T\xi_1 - T\zeta_1) - A_1\, T\xi_1 - B_1 (T\xi_1 + T\zeta_1).$$

De hoofdassen der werkingssfeer worden namelijk door ξ_1, η_1 en ζ_1 aangeduid, terwijl de laatste als as van symmetrie is aangenomen, zoodat $T\eta_1 = T\xi_1$ is gesteld. Verder

is α_2' de cosinus van den hoek p tusschen de x-as der molecule en de ζ_1-as van de werkingssfeer.

Wordt $T_{\xi_1} - T_{\zeta_1} = G$ gesteld, dan verkrijgt het terugwerkend koppel de waarde

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial \Sigma V_1}{\partial p} = -\tfrac{1}{2}(A_1 - B_1)\,G \sin 2p\,.$$

De evenwichtsvoorwaarde is dus, zooals uit de gelijkstelling van de beide gevonden koppels volgt:

$$G \sin 2p = D_1(1+\mu)\,a \sin 2\varphi \;\ldots\ldots\; (41)$$

De waarde van G wordt bepaald door de afwijking van den isotropen toestand binnen een werkingssfeer. Zij kan dus van het eene punt tot het andere gewijzigd worden. In een ruimte-element, dat vele werkingssferen bevat, zal men nu een gemiddelde waarde van G kunnen aannemen. Wij beschouwen haar gedurende de wenteling als standvastig. Dit zal bij de volgende berekeningen steeds ondersteld worden.

Zij nu φ_1 de hoek tusschen de ζ-as en de ζ_1-as, dan moet $p = \varphi_1 - \varphi$ zijn. Door oplossing van φ uit (41) wordt de formule verkregen:

$$\cos 2\varphi = \frac{D_1(1+\mu)\,a + G\cos 2\varphi_1}{\sqrt{G^2 + D_1^2(1+\mu)^2 a^2 + 2 D_1 G(1+\mu)\,a \cos 2\varphi_1}}.$$

Zij nu nog de deformatie zoo klein, dat ook de verandering in de richting der moleculen slechts gering is, dan kan men voor de laatste uitdrukking in de plaats schrijven:

$$\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_1 + \frac{D_1(1+\mu)\,a \sin^2 2\varphi_1}{G} \;\ldots\; (42)$$

Als alle moleculen in een ruimte-element oorspronkelijk evenwijdig gericht waren, zou de spanning τ_{33}, voordat de uitwendige kracht op den cilinder werkte, volgens (23) bedragen:

$$\tau_{33} = \tfrac{1}{2}\,n\,D_1\,\{B_1 + (A_1 - B_1)\cos^2\varphi_1\}.$$

De spanning τ_{33}' na de wenteling der moleculen wordt in hetzelfde element gevonden door φ_1 met φ te verwisselen. De wijziging der spanning zou dus wezen:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \tfrac{1}{4} D_1 n (A_1 - B_1) (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1) \ldots (43)$$

Substitueert men de waarde van $\cos 2\varphi$ uit (42), dan wordt de wijziging, welke de spanning ondergaat:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu) a \sin^2 2\varphi_1}{4 G} \ldots (44)$$

Het ruimte-element is echter, zooals ook bij vergelijking (24) werd ondersteld, zeer groot ten opzichte van den afstand, waarop de moleculen nog een merkbaren invloed op elkander uitoefenen. Daarom mogen in dat element weder de assen der moleculen als naar alle richtingen in gelijken getale aanwezig ondersteld worden. Volgens de beschouwing, die in § 7 werd meegedeeld, wordt dan:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{1}{8} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu) a}{G} \int_0^\pi \sin^2 2\varphi_1 \sin \varphi_1 \, d\varphi_1 =$$

$$= \frac{2}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu) a}{G} =$$

$$= \frac{2}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu) t_{33}}{E G} \ldots\ldots (45)$$

Wanneer de deeltjes in het element gelijke richtingen hadden, zou de spanning τ_{11}, volgens de ξ-as, op een willekeurig oogenblik door de formule worden uitgedrukt:

$$\tau_{11} = \tfrac{1}{2} n D_1 \{B_1 + (A_1 - B_1) \alpha^2\},$$

waarin, even als vroeger, α de cosinus van den hoek tusschen de x- en de ξ-as is. Zij nu λ de hoek tusschen de ξ-as en het vlak, waarin de x-as zich beweegt, dan is:

$$\alpha = \sin \varphi \cos \lambda$$

en dus:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = -\tfrac{1}{4} D_1 n (A_1 - B_1)(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1) \cos^2 \lambda \ldots (46)$$

Daar de gemiddelde waarde van $\cos^2 \lambda$ tusschen de grenzen 0 en 2π van den hoek λ, $= \frac{1}{2}$ is, vindt men, als alle richtingen van de assen der moleculen in het element in gelijken getale voorkomen, op dezelfde manier als boven:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = -\frac{1}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu) a}{G} \ldots (47)$$

Dezelfde uitdrukking verkrijgt men voor de verandering in spanning volgens de η-as.

De cilinder moge nu in de tweede plaats een torsie ondergaan, zoodat:

$$u = b \eta \zeta \quad \text{en} \quad v = -b \xi \zeta$$

is, of als men in een punt de richtingen der hoofdspanningen als ξ_2- en ζ_2-assen aanneemt:

$$u(\xi_2) = \tfrac{1}{2} b r, \qquad w(\zeta_2) = -\tfrac{1}{2} b r$$

zijnde, even als vroeger: $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Deze vormverandering kan worden opgevat als een spanning volgens de eene hoofdas en een even groote samendrukking volgens de andere. De eene doet een koppel ontstaan: $\frac{D_1}{4} b r (A_1 - B_1) \sin 2\psi$ als ψ de hoek tusschen de x- en de ξ_2-as is; ook ontstaat een terugwerkend koppel in hetzelfde vlak: $\frac{1}{2}(A_1 - B_1) G \sin 2(\psi_1 - \psi)$, waarin ψ_1 de oorspronkelijke waarde van ψ beteekent. Evenzoo ontstaan in het vlak $x \zeta_2$ twee koppels, die evenwicht maken. Bij de berekening der spanningen kan aangenomen worden, dat de as der molecule in beide vlakken tegelijk afwijkt. De evenwichtsvoorwaarden worden:

$$\left.\begin{array}{l} \text{in het eene vlak:} \\ \qquad \frac{D_1}{2} b r \sin 2\psi = G \sin 2(\psi_1 - \psi) \\ \text{in het andere:} \\ \qquad -\frac{D_1}{2} b r \sin 2\chi = G \sin 2(\chi_1 - \chi) \end{array}\right\} \ldots . (48)$$

De eerste geeft volgens de ξ_2- en de ζ_2-assen de verandering in spanningen:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \frac{1}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b r}{G}$$

en

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = -\frac{1}{30} \frac{D_1 n (A_1 - B_1) b r}{G}$$

De tweede voorwaarde geeft daarentegen:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \frac{1}{30} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b r}{G}$$

en

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = -\frac{1}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b r}{G}.$$

Hieruit vindt men voor de geheele verandering in spanning loodrecht op den voerstraal van het beschouwde punt:

$$\frac{1}{5} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)}{G} \cos 45^0.$$

Het moment van torsie, dat door de nawerking ontstaat, wordt:

$$M\zeta' = \frac{1}{10} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b}{G} \sqrt{2} \int r^2 dq = \frac{\pi}{20} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b}{G} \varrho^4 \sqrt{2}.$$

als ϱ ook hier de straal der doorsnede is.

De uitdrukking voor het moment $M'\zeta$, die in vergelijking (33) werd medegedeeld, invoerende, vindt men:

$$M'\zeta = \frac{1}{5} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu)}{E G} \sqrt{2} \,.\, M\zeta \,.\,.\,. \quad (49)$$

Vergelijkt men de verhoudingen $\frac{\tau_{33}' - \tau_{33}}{t_{33}}$ uit vergelijking (45) en $\frac{M'\zeta}{M\zeta}$ uit (49), dan ziet men, dat de laatste 1,5 $\times$ $\sqrt{2}$-maal zoo groot als de eerste is.

F. Kohlrausch *) heeft door proeven, die wel niet met denzelfden draad werden genomen, maar toch met draden, die uit dezelfde soort van caoutchouc bestonden, aangetoond, dat de intensiteit der nawerking (zie de volgende §) bij de torsie en bij de lengtespanning niet veel verschilt. De eerste werd door hem iets grooter dan de laatste bevonden.

De theorie geeft dus in hoofdzaak dezelfde uitkomst, die door de waarnemingen werd opgeleverd. Een geheele overeenstemming was niet te verwachten.

§ 11. Tot nu toe werd het verloop der veerkrachtige nawerking ten opzichte van den tijd niet in de beschouwing opgenomen. Juist dit verloop is zoowel door Weber bij de spanning van cocondraden als door Kohlrausch bij de torsie van verschillende stoffen en door Neesen zeer uitvoerig onderzocht. Deze waarnemers hebben empirische formules opgesteld ter berekening van de verandering der nawerking met den tijd. Weber stelde de snelheid, waarmede de deeltjes van een uitgerekten cocondraad na opheffing van het gewicht in den evenwichtstoestand terugkeeren, evenredig met een macht van den afstand, dien zij nog te doorloopen hebben. Wordt die afstand door x voorgesteld, dan is volgens Weber:

$$-\frac{dx}{dt} = bx^p \text{, waarin } p > 1 \text{ is,}$$

en

$$x = \frac{b_1}{(t + C_1)^p}.$$

Kohlrausch daarentegen gaf de formule:

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t^n}$$

en daaruit:

$$x = Ce^{-\frac{\alpha}{1-n} t^{1-n}} = Ce^{-at^m}.$$

*) Poggendorff's *Annal.* CLVIII. p. 358.

Voor n werd uit de waarnemingen een waarde afgeleid, die weinig van de eenheid afweek. Stelt men haar daaraan gelijk, dan wordt:

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t}; \qquad x = \frac{c}{t^{\alpha}}.$$

In dit geval komen dus de formules van WEBER en KOHLRAUSCH, als men in de eerste de constante $C_1 = 0$ neemt, op hetzelfde neêr. De coëfficient α der snelheid is door KOHLRAUSCH de *coëfficient der elastische nawerking* genoemd. Deze grootheid bleek bijna uitsluitend van den aard der onderzochte stof af te hangen. De integratieconstante c daarentegen bleek ongeveer evenredig met de oorspronkelijke deformatie, dus bij de proeven van KOHLRAUSCH met den hoek van torsie te zijn; verder was zij evenredig met een bepaalde macht van den tijd, gedurende welken de uitwendige krachten op het lichaam gewerkt hadden en met de temperatuur, als deze gerekend werd van $-21^0,5$. Deze constante stelt den geheelen weg voor, die gedurende de nawerking doorloopen wordt. Wij noemen haar ter onderscheiding van den coëfficient α de *intensiteit der nawerking*.

De formule van KOHLRAUSCH gaf binnen de grenzen zijner waarnemingen een zeer groote overeenstemming met de uitkomsten der proeven. Zij kan natuurlijk niet gelden voor de eerste oogenblikken, nadat de wenteling der moleculen begonnen is, want wanneer $n = 1$ gesteld wordt, zou de snelheid bij den aanvang $= \infty$ worden. Zij is dan ook, zooals KOHLRAUSCH opmerkte slechts een empirische formule, die binnen vrij ruime grenzen ter berekening der verschijnselen goede diensten kan bewijzen.

NEESEN maakte bij zijn onderzoekingen omtrent de nawerking, welke bij de torsie optreedt *), gebruik van een andere formule:

$$x = Ce^{-\beta t}.$$

*) POGG. *Annal.* CLIII, p. 498.

Hij vond daarbij β onafhankelijk van den duur en de grootte der torsie, C daarentegen afhankelijk van deze beide grootheden. De afhankelijkheid van de temperatuur kon hij niet met zekerheid nagaan. In deze formule moet dus β de *coëfficient der nawerking* en C hare *intensiteit* worden genoemd.

De formule van NEESEN gaf tot ongeveer 25 minuten na het begin der nawerking uitkomsten, die met de waarnemingen overeenkwamen, maar na dien tijd niet meer. Om ook het verdere verloop van het verschijnsel te berekenen, moest hij gebruik maken van de meer samengestelde formule:

$$x = Ce^{-\beta t} + C_1 e^{-\beta_1 t}.$$

Men heeft hierin twee verschillende coëfficienten der nawerking β en β_1, terwijl haar intensiteit hier door $C + C_1$ wordt voorgesteld. De grootheden c_1 en β_1 werden uit de waarnemingen afgeleid, die geruimen tijd na het begin der nawerking verricht werden.

KOHLRAUSCH *) heeft tegen de formule van NEESEN aangevoerd, dat daarin over een grooter aantal constante grootheden beschikt wordt, die uit de waarnemingen berekend moeten worden dan in zijn formule het geval is; dat daarom de overeenstemming tusschen de waargenomen en berekende verplaatsingen, die NEESEN vond, minder sprekend is dan die, welke zijn eenvoudige formule opleverden. Bovendien toonde KOHLRAUSCH aan, dat zijn interpolatie formule ongeveer even goed op de waarnemingen van NEESEN paste, als de formule, die deze gegeven had.

De langzame wenteling der moleculen is aan een weerstand toe te schrijven, van wier aard men niets weet. Onderzoeken wij in een eenvoudig geval tot welke uitkomsten de onderstelling leidt, dat de weerstand even als bij de beweging van een lichaam in de lucht, van de snelheid afhangt. Daar de beweging zeer langzaam verloopt,

---

*) POGG. *Annal.* CLV. p. 579.

kan misschien de weerstand evenredig met de hoeksnelheid worden aangenomen. In § 2 werd meegedeeld, dat O. E. MEIJER een theorie der nawerkingsverschijnselen poogde af te leiden uit de inwendige wrijving, die bij de veerkrachtige verschuivingen der moleculen zou ontstaan. De bezwaren werden vermeld, die tegen deze opvatting in te brengen zijn, al is het ook zeer waarschijnlijk, dat de inwendige wrijving, die MEIJER invoerde, wel bestaat. Wanneer dit zoo is, dan is ook de onderstelling natuurlijk, dat een dergelijke weerstand bij de wenteling der moleculen voorkomt.

Gaan wij deze hypothese na bij het eenvoudige geval, dat in de vorige § behandeld werd. Behalve de koppels, die daar berekend werden, komt nog het weerstandskoppel, dat gelijk aan $\lambda \frac{dp}{dt}$ gesteld wordt. Omdat de molecule in dit geval om een hoofdas wentelt, is de differentiaal-vergelijking der beweging:

$$(A_1 + B_1) \frac{d^2 p}{dt^2} = \tfrac{1}{2} D_1 (A_1 - B_1)(1 + \mu)\, a \sin 2 (\varphi_1 - p) -$$
$$- \tfrac{1}{2} (A_1 - B_1)\, G \sin 2 p - \lambda \frac{dp}{dt}$$

of, als p zeer klein ondersteld wordt, gedurende het geheele verloop der beweging:

$$(A_1+B_1)\frac{d^2p}{dt^2}=\tfrac{1}{2}D_1(A_1-B_1)(1+\mu)a\sin 2\varphi_1-(A_1-B_1)Gp-\lambda\frac{dp}{dt}.$$

Deze vergelijking geeft na integratie:

$$p = \frac{D_1 (1+\mu)\, a \sin 2\varphi_1}{2\, G} + C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad . \; . \; (50)$$

waarin C_1 en C_2 de integratie-constanten zijn.

Uit $\cos 2 \varphi = \cos 2 (\varphi_1 + p)$, volgt, bij de aangenomen onderstelling:

$$\cos 2 \varphi - \cos 2 \varphi_1 = 2 p \sin 2 \varphi_1.$$

Even als bij de vergelijking (43), vindt men nu voor de verandering, die de spanning τ_{33} op den tijd t na het begin der beweging ondergaan heeft:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1^2\, n\,(A_1 - B_1)\,(1 + \mu)\, a \sin^2 2\,\varphi_1}{4\,G} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sin 2\,\varphi_1 \,.\, D_1\, n\,(A_1 - B_1)\,(C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}) \;..\; (51)$$

De exponenten k_1 en k_2 moeten voldoen aan de vergelijking:

$$(A_1 + B_1)\, k^2 + \lambda\, k + (A_1 - B_1)\, G = 0.$$

Zij zijn dus:

$$k = -\frac{\lambda}{2\,(A_1 + B_1)} \pm \frac{1}{A_1 + B_1} \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\lambda^2 - (A_1^2 - B_1^2)\, G}.$$

Omdat aangenomen is, dat de x-assen der moleculen zich evenwijdig met de as van den cilinder trachten te stellen tengevolge van de spanning, is, volgens het slot van § 6: $A_1 > B_1$. Wanneer λ klein is (de inwendige wrijving dus gering), worden k_1 en k_2 imaginair; dan zal de molecule om den evenwichtsstand slingeren. Wanneer $\frac{1}{4}\,\lambda^2 > (A_1^2 - B_1^2)\, G$, worden beide waarden negatief en de molecule zal langzamerhand tot den evenwichtsstand naderen. Als λ zeer groot is, wordt:

$$k_1 = -\frac{\lambda}{(A_1 + B_1)} + \frac{(A_1 - B_1)\, G}{\lambda} \quad \text{en} \quad k_2 = -\frac{(A_1 - B_1)\, G}{\lambda}.$$

Bij eenigszins aanzienlijke waarden van t zal dan de term $C_1 e^{k_1 t}$ in de vergelijking (50) slechts een zeer geringen invloed uitoefenen. Men kan dan voor de verandering in spanning schrijven:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1^2 (A_1 - B_1)(1 + \mu)\, a \sin^2 2\varphi_1}{4\,G} \left(1 - e^{-\frac{(A_1 - B_1) G t}{\lambda}}\right) .. (52)$$

De formule (50) komt geheel overeen met die, welke NEESEN bij de berekening der nawerking bezigde.

§ 12. Maar de ingevoerde weerstand is niet voldoende, om alle bij de wenteling der moleculen voorkomende verschijnselen te verklaren. Er blijft namelijk na de opheffing der uitwendige krachten altijd een gedeelte der vormverandering in een veerkrachtig lichaam over. Door de proeven van WERTHEIM, G. WIEDEMANN en anderen is aangetoond, dat zelfs na de werking van kleine krachten een blijvende deformatie waar te nemen is. Het is waarschijnlijk, dat de moleculen, tengevolge van den weerstand, dien zij bij de wenteling ondergaan, niet geheel in de evenwichtsstanden komen, die in de vorige paragrafen berekend werden. De hypothese, dat zij na een wenteling niet in de vroegere standen teruggebracht worden, is ook in WEBER's theorie van het geïnduceerde magnetismus ingevoerd. Daar, zooals in § 6 werd opgemerkt, de onderstelling, dat de moleculen als magneten te beschouwen zijn, een bijzonder geval uitmaakt van de hier meegedeelde theorie, zal het permanente magnetisme aan dezelfde oorzaak kunnen worden toegeschreven als de genoemde blijvende afwijkingen.

Om de magnetische verschijnselen te verklaren, nam W. WEBER, zooals bekend is, aan, dat de moleculairmagneten wentelen onder den invloed eener uitwendige kracht en van een terugwerkend koppel Dit laatste werd echter niet uit de wisselwerking der moleculen afgeleid. MAXWELL *) merkte op, dat deze hypothese geen rekenschap gaf van het magnetisme, dat na opheffing der uitwendige krachten in staal overblijft. Hij nam daarom aan, dat de as van een magnetische molecule in de oorspronkelijke ligging terugkeert, na opheffing der krachten, indien de hoek van afwijking kleiner was dan een bepaalde waarde β_0, maar dat als de afwijking β grooter was dan β_0, een permanente verandering in richting $= \beta - \beta_0$ overblijft.

MAXWELL paste deze theorie toe op het geval, dat nadat

*) *On Electricity and Magnetism.* II p. 79.

een stuk ijzer onderworpen geweest was aan den invloed eener magnetische kracht, het daarna aan den invloed eener nieuwe kracht blootgesteld werd. Zijn uitkomsten waren in overeenstemming met de waarnemingen van JOULE en anderen.

Een nader onderzoek heeft FROMME *) ingesteld. Indien namelijk MAXWELL's beschouwing juist ware, moesten kleine magnetische krachten geen permanent magnetisme kunnen opwekken. FROMME onderzocht nu de werking van de horizontale en verticale componenten van het aardmagnetisme en hij kon geen invloed op het permanente magnetisme in staal waarnemen. Ofschoon wegens onvermijdelijke fouten deze proeven de zaak niet konden beslissen, meende FROMME toch, dat zij ten gunste van MAXWELL's theorie konden worden uitgelegd. Hij nam verder waar, dat als het permanente magnetisme na herhaalde werkingen van dezelfde kracht een zekere grenswaarde bereikt had, een kleinere kracht dat magnetisme niet meer kon wijzigen. Tegenover kleinere krachten gedraagt een stalen staaf zich verder als week ijzer. De magnetische moleculen hebben dus, zeide FROMME, in staal een onbepaald aantal evenwichtsstanden; elke stand is voor een bepaald gebied van krachten stabiel. Het is dus, volgens hem, ook waarschijnlijk, dat de niet-magnetische toestand voor kleine krachten een toestand van stabiel evenwicht zou wezen.

De hypothese van MAXWELL werd bestreden door CHWOLSON †), op grond van de onmogelijkheid, om zich een duidelijke voorstelling te kunnen vormen van de werkingen, die een dergelijke beweging der moleculen zouden teweegbrengen.

CHWOLSON stelde eene andere hypothese op. Hij nam aan, dat in staal de koolstof-atomen een belemmering zijn voor de vrije wenteling der moleculen. Het gevolg daarvan zou wezen, dat gemiddeld het koppel, hetwelk op een molecule werkt, een bepaalde grootte zou moeten overschrijden, om

*) POGG. *Annal.* Ergänzungsband VII, p. 390.

†) POGG. *Annal.* Ergänzungsb. VII. p. 572.

beweging te kunnen veroorzaken. De wenteling moet geringer zijn dan in het geval, dat de koolstof-deeltjes niet aanwezig waren, want zij houdt niet op als het magnetisch koppel evenwicht met het terugwerkend koppel maakt, maar als het verschil hunner momenten een bepaalde grootte bereikt. Een groot aantal waarnemingen van VILLARI, van G. WIEDEMANN, van JAMIN en van anderen werden door CHWOLSON uit zijn hypothese afgeleid.

Een dergelijke hypothese als CHWOLSON ten opzichte van het staal aannam, kan in het algemeen dienen, om de permanente verandering in richting der moleculen te berekenen. Wij onderstellen dus, dat in elk lichaam het koppel, dat op een molecule werkt, een bepaalde grootte moet overtreffen, om beweging te veroorzaken. Het is duidelijk, dat deze onderstelling, bij de geheele onbekendheid, waarin men verkeert ten opzichte van de inwendige bewegingen in de vaste lichamen, slechts als noodhulp moet dienen, om de verschijnselen zoo goed mogelijk te kunnen berekenen.

Noemt men nu het weerstandsmoment $\frac{1}{2} Q$, dan verandert vergelijking (41) in:

$$D_1 (1 + \mu) a \sin 2\varphi = G \sin 2p + Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Is de molecule uit den stand van evenwicht afgeweken, dan poogt, na opheffing der uitwendige krachten, die op het lichaam werkten, het koppel $\frac{1}{2} G \sin 2p$ haar in de vroegere richting terug te brengen, maar daarvoor moet het moment van dat koppel grooter zijn dan $\frac{1}{2} Q$.

Een kleine afwijking zal dien ten gevolge blijvend zijn. Wanneer p_1 de grootste afwijking is, die de as van een deeltje nog met de oorspronkelijke richting kan maken, zonder dat zij terugbewogen wordt, heeft men:

$$\sin 2p_1 = \frac{Q}{G}.$$

De spanning, die zulk een afwijking veroorzaakt, wordt afgeleid uit:

$$D_1 (1 + \mu)\, a \sin 2\varphi = 2Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Als de kracht, die op het grondvlak van den cilinder volgens de as werkt, zoodanig is, dat $D_1 (1 + \mu)\, a < Q$ is, zal geen enkele molecule een verandering van stand ondergaan; is zij tusschen Q en $2Q$ begrepen, dan moet de wenteling van alle moleculen permanent blijven; na het verdwijnen der kracht blijft geen nawerking over.

Wanneer $D_1 (1 + \mu)\, a > 2Q$ wordt, zullen de assen van een aantal moleculen den grenshoek overschrijden. Ze behouden, nadat de vormverandering verdwenen is, de afwijking p_1 van de oorspronkelijke richting. Als men in de vergelijking (53) voor p in de plaats schrijft: $\varphi_1 - \varphi$, vindt men, als $D_1 (1 + \mu)\, a$ en Q kleine grootheden zijn met betrekking tot G:

$$\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_1 + \frac{D_1 (1 + \mu)\, a \sin^2 2\varphi_1 - Q \sin 2\varphi_1}{G}.$$

De verandering in spanning, evenwijdig met de as van den cilinder, bedraagt, volgens formule (43):

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1 (1 + \mu)\, a \sin^2 2\varphi_1 - Q \sin 2\varphi_1}{4G} D_1 n (A_1 - B_1) \ldots (55)$$

Als in een ruimte-element alle mogelijke richtingen der assen van moleculen voorkomen, moet, even als vroeger, met $\frac{1}{2} \sin \varphi_1 \, d\varphi_1$ vermenigvuldigd en daarna geïntegreerd worden, maar nu tusschen de waarden van φ_1, die bepaald worden uit de vergelijking:

$$D_1 (1 + \mu)\, a \sin 2\varphi_1 = Q$$

want indien δ de kleinste waarde van φ_1 is, die aan deze vergelijking voldoet, heeft alleen een afwijking plaats van de assen der moleculen, bij welke φ_1 gelegen is tusschen δ en $90^0 - \delta$ en tusschen $90^0 + \delta$ en $180^0 - \delta$. De uitkomst is:

$$\tau_{33}-\tau_{33}=\frac{D_1(1+\mu)a\int_{\delta}^{90^0-\delta} sin^2 2\varphi_1\, sin\varphi_1\, d\varphi_1 - Q\int_{\delta}^{90^0-\delta} sin\, 2\varphi_1\, sin\,\varphi_1\, d\varphi_1}{4\,G} D_1 n(A_1-B_1)$$

of ook:

$$\tau_{33}'-\tau_{33}=$$

$$=\frac{D_1(1+\mu)a\left[\frac{2}{3}(cos^3\delta-sin^3\delta)+\frac{2}{5}(sin^5\delta-cos^5\delta)\right]-\frac{1}{3}Q(cos^3\delta-sin^3\delta)}{2\,G} D_1 n(A_1-B_1).$$

Deze uitdrukking moet natuurlijk tusschen de aangegeven grenzen berekend worden. Zoo zal men vinden, als:

$D_1(1+\mu)a$	$=1{,}1\,Q$ is . .	$\tau_{33}'-\tau_{33}$	$=0{,}010\times$	$\frac{D_1 n(A_1-B_1)Q}{2\,G}$
»	$=1{,}2\,Q$ » . .	»	$=0{,}026\times$	»
»	$=1{,}3\,Q$ » . .	»	$=0{,}046\times$	»
»	$=1{,}4\,Q$ » . .	»	$=0{,}067\times$	»
»	$=1{,}5\,Q$ » . .	»	$=0{,}090\times$	»
»	$=2\,Q$ » . .	»	$=0{,}212\times$	»
»	$=2{,}1\,Q$ » . .	»	$=0{,}238\times$	»
»	$=2{,}2\,Q$ » . .	»	$=0{,}263\times$	»
»	$=2{,}5\,Q$ » . .	»	$=0{,}341\times$	»

In de laatste drie gevallen is de geheele afwijking niet blijvend; daar $D_1(1+\mu)\,a > 2\,Q$ is, zullen sommige moleculen den grenshoek overschrijden, en na opheffing der uitwendige krachten dezen hoek met de as blijven vormen. Zoolang de krachten nog op het grondvlak van den cilinder werken, vormen de assen der moleculen met de ζ-as den hoek φ. Als de krachten verdwenen zijn, zal deze hoek naderen tot de waarde $\varphi_1 - p_1$, waarbij p_1 weder den grenshoek voorstelt.

Zij $\tau_{33}' - \tau_{33}''$ het gedeelte der spanning, dat weder verdwijnt, dan vindt men:

$$\tau_{33}' - \tau_{33}'' = \frac{1}{4} D_1 n (A_1 - B_1) [\cos 2\varphi \quad \cos 2(\varphi_1 - p_1)].$$

Maar omdat p_1 een kleine hoek is, kan geschreven worden:

$$\cos 2(\varphi_1 - p_1) = \cos 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1 \sin 2p_1$$

en brengt men de waarde $\sin 2p_1 = \frac{Q}{G}$ over, dan wordt:

$$\tau_{33}' - \tau_{33}'' = D_1 n (A_1 - B_1) \frac{D_1 (1+\mu) a \sin^2 \varphi_1 - 2 Q \sin 2\varphi_1}{4 G}.$$

Behandelt men deze vergelijking evenzoo als (55) en neemt men daarna voor φ_1 de waarden aan, die aan (54) voldoen, dan wordt de uitkomst. Voor:

$$D_1(1+\mu)a = 2{,}1\ Q \ . \ . \ \tau_{33}' - \tau_{33}'' = 0{,}007 \times \frac{D_1 n (A_1 - B_1) Q}{2 G}$$

$$\text{»} \quad = 2{,}2\ Q \ . \ . \quad \text{»} \quad = 0{,}020 \times \quad \text{»}$$

$$\text{»} \quad = 2{,}5\ Q \ . \ . \quad \text{»} \quad = 0{,}072 \times \quad \text{»}$$

Bij deze vormveranderingen is dus nog het grootste gedeelte van de afwijking der assen van de moleculen permanent.

Uit deze beschouwing kan in de eerste plaats afgeleid worden, dat zelfs als zeer geringe krachten op een lichaam werken, een blijvende afwijking der moleculen en daarom ook een blijvende vormverandering ontstaat, die bij aangroeiing der krachten snel toeneemt. Ten tweede volgt er uit, dat als de weerstand afneemt, b. v. bij herhaalde werkingen derzelfde krachten, de permanente afwijking der moleculen daarbij aangroeit. Wordt toch een lichaam meermalen door dezelfde kracht gespannen en zij de eerste keer:

$$D_1 (1 + \mu) a = 1{,}2\ Q,$$

dan wordt:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = 0{,}022 \times \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu) a}{2 G};$$

als later de weerstand, dus Q, verminderd is, zoodat dan

$D_1 (1 + \mu) a = 2 Q$ geworden is, wordt de permanente verandering der spanning:

$$= 0{,}106 \times \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) (1 + \mu) a}{2 G}.$$

De aangroeiing zal tot zekeren grens naderen.

G. WIEDEMANN *) heeft waargenomen, dat als een draad herhaaldelijk door hetzelfde gewicht getordeerd wordt, de permanente torsie daarbij tot een bepaalden grens vermeerdert. Deze torsie was zeker slechts voor een gedeelte aan de verandering in richting der moleculen toe te schrijven, maar de verklaring van het verschijnsel blijft gelden, als men met WIEDEMANN aanneemt, dat de weerstand, die de wenteling der deeltjes belemmert, van denzelfden aard is, als die, welke de verschuiving ondervindt.

De waarneming van WIEDEMANN is in overeenstemming met de bovenvermelde proeven van FROMME, waarbij herhaaldelijk dezelfde magnetische krachten op een stalen staaf werkten. In beide gevallen konden kleinere krachten geen blijvende veranderingen teweegbrengen.

Beschouwen wij de proeven van WIEDEMANN, die hij met een draad van messing genomen heeft, nauwkeuriger. De torsie werd onmiddelijk nadat de kracht op den draad werkte, en ook na geruimen tijd gemeten; beide werden in deelen eener schaal aangegeven en door T en T_1 aangeduid. Uit een tabel, die in de verhandeling van WIEDEMANN (pag. 489) voorkomt, ontleen ik de volgende getallen:

Gewichten:	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	gram
$T_1 - T$	0	0	0	0	1	1	2,5	4	13	13	33	95	deelen.

Na opheffing der uitwendige kracht, werd weder onmiddelijk de overblijvende torsie P en de permanente torsie P_1, die na langen tijd nog bestond, gemeten. Daarbij werd gevonden:

---

*) WIEDEMANN. *Annal der Physik. und Chemie.* VI. p. 490.

Gewichten:	30	40	40	60	70	80	90	100	110	120	130	140	gram
$P—P_1$:	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	1,5	2,8	8	deelen.

De grootheden $T_1—T$ en $P_1—P$ zijn aan elastische nawerking, dus aan de wenteling der moleculen toe te schrijven. Zooals WIEDEMANN opmerkte, waren T en P niet nauwkeurig te bepalen. Al zijn dus de aangegeven waarden niet geheel juist, is het toch duidelijk, dat $T_1—T$ en $P_1—P$ met de tordeerende krachten snel aangroeien. Vooral is opmerkelijk, dat bij dezelfde gewichten $T_1—T$ veel grooter is dan $P—P_1$. Terwijl na opheffing der kracht van 110 gram nauwelijks eenige nawerking te bespeuren was, werd deze gedurende de torsie door een gewicht van 70 gram reeds waargenomen.

Zooals uit de theorie volgt, blijkt ook uit deze proeven, dat de nawerking, die door kleine krachten veroorzaakt wordt, niet weer verdwijnt na opheffing dier krachten, en dat na grootere deformatiën de moleculen slechts gedeeltelijk terugwentelen.

Verder werd waargenomen, dat als de draad nog 16 maal door het gewicht van 140 gram getordeerd werd, en daarna weder aan krachten van 10, 20, enz. gram onderworpen werd, reeds bij de torsie onder de werking van 60 gram een duidelijke nawerking plaats had. Bij de eerstvermelde waarneming was bij deze kracht de wenteling nog niet mogelijk. Nu was door de herhaalde bewegingen in dezelfde richting de weerstand geringer geworden en werd daardoor een verschil tusschen de grootheden T en T_1 waargenomen. De in de vorige paragraaf besproken weerstand gedurende de beweging was ook verminderd, de snelheid, waarmeê de moleculen wentelden dientengevolge grooter geworden Op deze wijze kan men verklaren, dat bij de tweede reeks van waarnemingen, toen de draad 16 maal door 140 gram getordeerd was geweest, voor $T_1—T$ onder den invloed van 130 gram slechts de waarde van 4, onder den invloed van 140 gram de waarde van 5 deelen der schaal werd gevonden. Deze getallen waren bij de eerste proef 33 en 95. Nu was bij de bepaling van T de nawerking waar-

schijnlijk reeds grootendeels afgeloopen. Door verschillende oorzaken, zooals herhaalde vormveranderingen in dezelfde richting, kleine stooten, die men aan het lichaam geeft en anderen, vermindert de weerstand, dien de moleculen ondervinden. Hierdoor laat zich ook het verschijnsel verklaren, dat bij gelijktijdige verplaatsingen der moleculen in verschillende richtingen, de nawerkingen door de verplaatsingen afzonderlijk veroorzaakt, elkander versterken; de weerstand is bij die verschillende bewegingen geringer geworden.

Het onderscheid, dat BRAUN opmerkte, tusschen de nawerkingen, die door gelijktijdige en op elkaâr volgende krachten teweeggebracht werden, is dus door de onderstelde eigenschap van den weerstand (ook door WIEDEMANN aangenomen) te verklaren.

De invloed der temperatuur op de veerkrachtige nawerking is samengestelder. Bij verhooging van de temperatuur zullen de deeltjes gemiddeld op grootere afstanden van elkaâr gebracht worden en worden de krachten, die zij op elkander uitoefenen, geringer. Zoowel het koppel, dat evenredig is met de deformatie als het terugwerkend koppel nemen daardoor kleiner waarden aan. Maar ook wordt de beweeglijkheid der deeltjes grooter, de weerstand geringer. Als nu deze laatste invloed de overhand heeft, moet bij stijging van temperatuur de intensiteit der nawerking (zie § 11) grooter worden, zooals de proeven hebben uitgewezen. De snelheid, waarmede de deeltjes zich bewegen, moet dan ook toenemen. Dit laatste is door F. KOHLRAUSCH bij de terugwenteling van een draad, die gedurende geruimen tijd een aanzienlijke torsie ondergaan had, waargenomen *).

§ 13. In de vergelijkingen (26) zijn de evenwichtsvoorwaarden gegeven van een veerkrachtig lichaam met inachtneming van de afmetingen der moleculen. Daaruit zou men de bewegingsvergelijkingen kunnen afleiden, als men een hypothese aannam omtrent den weerstand gedurende de wenteling der deeltjes, b.v. die, welke in § 11 bij een eenvoudig

*) POGG., *Annal.* CXXVIII, p. 413.

geval werd nagegaan. Zulke vergelijkingen zouden echter in het algemeen zeer samengesteld worden en zeker moeilijk te integreeren zijn.

Ik zal mij bepalen tot een paar algemeene opmerkingen over den invloed der nawerkingsverschijnselen op de demping der elastische trillingen.

W. Weber gaf als hoofdoorzaak van die demping de verandering van den evenwichtsstand der moleculen aan bij elke slingering, en G. Wiedemann *) heeft hetzelfde denkbeeld op grond van zijn proeven uitgesproken.

Gesteld, dat een draad uitgerekt worde: de moleculen draaien en trachten zich met één harer assen (in de beteekenis, welke op pag. 329 verklaard is) evenwijdig met de as van den draad te stellen. Nu worde de draad losgelaten: de moleculen keeren tot nieuwe evenwichtsstanden terug. Door de snelheid, die ze verkregen hebben, gaan ze over deze standen heen en bij de verkorting van den draad trachten de assen der moleculen zich loodrecht op die van den draad te plaatsen. Wegens den weerstand volbrengen ze echter die wenteling slechts gedeeltelijk. Werd de draad nu vastgehouden en langzaam terugbewogen, dan zou men bevinden, dat hij in een anderen stand tot rust kwam, als vóór de slingering. Immers moet hier een analoog verschijnsel plaats hebben, als bij herhaalde torsiën in tegengestelde richtingen. Wiedemann heeft daarbij duidelijk een verschuiving van den evenwichtsstand aangetoond en door magnetische onderzoekingen als waarschijnlijke oorzaak de draaiing der moleculen gevonden. Elke slingering heeft dus om een anderen stand van evenwicht plaats, omdat de moleculen telkens andere richtingen aannemen. De weerstand, bij de wenteling ondervonden, veroorzaakt daarom een demping der trillingen.

Als de verschuiving van den evenwichtsstand telkens evenredig met de afwijking a (zie § 10) is, volgt daaruit een afneming der amplituden naar een meetkundige reeks. Volgens § 12, en ook volgens de waarnemingen van Wiedemann

*) Wiedemann, *Annal.* VI, p. 513.

bij de torsie, neemt zoolang de weerstand groot is, de permanente afwijking sterker toe dan de temporaire spanning of torsie. Vooral bij het begin der slingeringen moet daarom het logarithmisch decrement van de amplitude afhangen. Door herhaalde vormveranderingen in dezelfde richting wordt, zooals reeds gezegd is, de weerstand kleiner en daarbij moet het decrement afnemen. Dit werd door STREINTZ *) en anderen waargenomen. STREINTZ bevond verder bij zijn proeven omtrent de torsie-slingeringen van een gespannen draad het decrement onafhankelijk van het traagheidsmoment van het gewicht. Daaruit zou volgen, dat de weerstand niet afhangt van de snelheid der verschuiving van de moleculen, zooals door MEIJER was aangenomen. MEIJER heeft namelijk uit dezelfde vergelijkingen, die hij ter verklaring van de elastische nawerking had opgesteld (zie § 2) het logarithmisch decrement der torsie-slingeringen berekend. Wanneer men echter in die berekening de massa van het spannende gewicht invoert volgens de opmerking van BOLTZMANN, dan bevindt men het decrement afhankelijk van het traagheidsmoment, wat in strijd is met de proeven van STREINTZ.

De invloed van herhaalde vormveranderingen in dezelfde richting op den weerstand en dus op het logarithmisch decrement werd tegengesproken door P. M. SCHMIDT †). Als oorzaak van de demping der slingeringen nam hij een inwendige wrijving aan, die hij evenredig met de eerste en tweede macht van de snelheid der slingeringen stelde. Als bijkomende omstandigheden, die hun invloed op de demping zouden doen gelden, rekende hij den weerstand van de lucht en de elastische nawerking in den gespannen draad. STREINTZ had beweerd, dat de weerstand van de lucht als een zeer geringe grootheid buiten rekening kon worden gelaten. SCHMIDT berekende dien invloed door middel eener formule, welke door LAMPE §) gevonden was en vond een waarde, die in sommige omstandigheden een vierde gedeelte van het geheele

*) POGG. *Annal.* CLIII, p. 387.

†) WIEDEMANN's *Annal.* II, p. 48 en p. 241.

§) Programm des Gymnasiums in Danzig 1866.

decrement bereiken kon. W. BRAUN en A. KURZ *) echter vonden bij hun proeven door toepassing van dezelfde formule slechts 2 pCt. der geheele demping.

Wat STREINTZ toeschreef aan een vermindering van den weerstand bij voortgezette trillingen, een verschijnsel door hem accomodatie genoemd, trachtte SCHMIDT door elastische nawerking van den gespannen draad te verklaren. Want volgens hem wordt het decrement niet slechts geringer, als men den draad een tijdlang laat slingeren, maar ook als men hem stil laat hangen, terwijl in het laatste geval, zoodra de nawerking afgeloopen was, geen vermindering van het decrement gedurende de slingeringen werd waargenomen.

Hier tegenover staat een proef van STREINTZ, die een draad gedurende $3^1/_2$ maand onafgebroken liet hangen en daarna nog een accomodatie met de slingeringen constateerde.

SCHMIDT trachtte op de volgende wijze aan te toonen, dat de vermindering van het logarithmisch decrement alleen door de elastische nawerking in den gespannen draad teweeg wordt gebracht.

W. WEBER had voor de lengte van een gespannen draad, die aan nawerking onderworpen was, op den tijd T na het begin der proef de formule gegeven:

$$L = L_0 + \frac{a}{b + T}$$

waarin a en b constante grootheden en L_0 de eindelijke lengte is. Hieruit volgt, zeide SCHMIDT, zonder eenige nadere berekening, dat ook het decrement der torsie-slingeringen aan de formule onderworpen moet zijn:

$$D = D_0 + \frac{a}{b + T}$$

waarin D_0 het decrement voorstelt, dat eindelijk bereikt wordt. Uit eenige waarnemingen der decrementen op verschillende dagen werden a en b berekend en de formule van toepassing gevonden op de overigen. Dit bewijst toch slechts,

*) CARL's *Repertorium* 15, p. 561.

dat de verandering van het decrement omgekeerd evenredig met den tijd zou zijn, die sedert een bepaald oogenblik verloopen is. Uit de analogie met een dergelijke wet bij de nawerking, volgt nog geenszins, dat de verschijnselen van elkander afhangen.

Wanneer de waarnemingen van STREINTZ omtrent de accomodatie-verschijnselen, (die ook door anderen bevestigd zijn), als juist worden erkend, kan men aannemen, dat dezelfde weerstand, die de permanente vormveranderingen veroorzaakt, zooals in de vorige § beschreven werd, vooral bij den aanvang van de veerkrachtige trillingen een belangrijken invloed op de demping uitoefent. Men overtuigt zich daarvan nog nader, als men de waarnemingen vergelijkt, die omtrent de veerkrachtige eigenschappen van glazen staven gedaan zijn.

Bij de torsie van glazen staafjes heeft de nawerking een snel verloop en een merkbare blijvende vormverandering wordt niet opgemerkt (BOLTZMANN); aan het beginsel der superpositie wordt bij glas voldaan, bij de meeste andere stoffen, die onderzocht werden, niet (KOHLRAUSCH); de eigenaardige nawerkingsverschijnselen na gelijktijdige deformatiën in verschillende richtingen zijn bij glas minder sprekend dan bij de metalen (F. BRAUN). Deze proeven bewijzen, dat de besproken weerstand bij dit materiaal zeer gering is. Men nam dan ook waar, dat het verschijnsel der accomodatie bij de slingeringen van glazen staven zeer gering was en dat van den aanvang af het logarithmisch decrement nagenoeg onafhankelijk van de amplitude was (KLEMENČIČ). Men heeft hier dus voornamelijk een weerstand gedurende de wenteling der moleculen, zooals in § 11 beschreven werd.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS VAN NORMAAL CYAANZUUR EN AFGELEIDEN,

DOOR

E. MULDER.

Vijfde Gedeelte.

Van versch ruw product waren 49,3 gr., na zes maanden te hebben gestaan onder een exsiccator, herleid tot 26,494 gr., waaruit krystalliseerde 1,43 gr. amido-verbinding. Het vloeibare deel afgeschonken bedroeg 21,119 gr. (het overige bleef tusschen de krystalmassa), na vier weken teruggebracht tot 20,971 gr. en schijnbaar geheel vast geworden. Tusschen filtreerpapier bleef terug 2,69 gr. aan ruw n. cyanuurzuur aethyl. Het papier werd uitgetrokken met (zuiveren) aether, en de oplossing geplaatst onder een exsiccator. Aldus werd erlangd 12,83 gr. van een vloeibaar product, na zes dagen verminderd tot 12,79 gr. en dit na acht dagen tot 12,74 gr.; het overige was gebleven in het papier. Hiervan gaf 0,5986 gr. aan kooldioxyde 1,065 gr. en 0,4006 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	48,5
waterstof	7,4.

Een hoeveelheid van 0,8073 gr. gaf met broomwater (verhoudingen als vroeger) 0,73 gr. afzetsel (na twee dagen

bedragende 0,726 gr.), dus op 0,15 gr. stof 0,135 gr. afzetsel. Dit vloeibare product kan alzoo geacht worden in samenstelling te naderen tot het lichaam van Cloëz. Bij staan werd het dan ook schijnbaar geheel vast, en verhield zich dus ook in dit opzicht daarmede overeenkomstig. Neemt men eens aan, dat het laatste voor de helft bestaat uit n. cyanuurzuur aethyl (het gehalte is wellicht grooter, zie later), dan leert een eenvoudige berekening, dat het versche ruwe product (na aftrek van alkoholgehalte) op 0,15 gr. ongeveer 0,085 gr. zou hebben bevat aan n. cyanuurzuur aethyl, ingeval geen polymerisatie was ingetreden; dit laatste heeft alzoo waarschijnlijk plaats gehad.

Van een andere bereiding gaf 2,0792 gr. versch ruw product met broomwater aan afzetsel 0,369 gr. (na twee dagen verminderd tot 0,356 gr); na aftrek van alkohol stemt dit overeen op 0,15 gr. stof met 0,043 gr. afzetsel. Gemeld versch ruw product bedroeg 61 gr., na 14 dagen onder een exsiccator verminderd tot 40 gr.. Van dit laatste gaf 0,7505 gr. met broomwater 0,444 gr. afzetsel (na twee dagen herleid tot 0,437 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,0888 gr. Na een maand werd deze bepaling herhaald, en werd van 0,723 gr. erlangd aan afzetsel 0,4365 gr., dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,0909 gr., alzoo slechts 0,0021 gr. meer. Ook in dit geval schijnt vorming van n. cyanuurzuur aethyl als waarschijnlijk te mogen afgeleid worden.

De 40 gr. van gemeld ruw product na staan, door de bepaling met broomwater herleid tot 37,246 gr. (een gedeelte was door het uitnemen verloren gegaan), was na een maand 35,301 gr., welk verlies wellicht ten deele kan worden toegeschreven aan nog teruggebleven alkohol. Bij staan was geen amido-verbinding afgezet, waartoe (zelfs bij eenigzins lage temperatuur) in den regel meer tijd wordt gevorderd. Hetzelfde geldt van de volgende bereiding van versch ruw product, bedragende 10,736 gr., na 14 dagen onder een exsiccator geworden 6,044 gr., van welk laatste 0,704 gr. aan broomafzetsel gaf 0,472 gr. (na twee dagen 0,454 gr.), derhalve op 0,15 gr. vloeistof

aan afzetsel 0,1 gr.. Van het ruw product versch gaf 2,2053 gr. met broomwater 0,347 gr. aan afzetsel (na twee dagen 0,333), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,038 gr. (als altijd na aftrek van het gehalte aan alkohol).

Van ruw product na staan (acht maanden oud) en uitkrystallisatie van amido-verbinding gaf 0,617 gr. aan broomafzetsel 0,45 gr. (na twee dagen 0,446 gr.), dus 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,109 gr.. Van deze bereiding versch was geen bepaling*) met broomwater gedaan.

Van een andere bereiding van ruw product, bewaard gedurende vijf maanden (het fleschje was nu en dan geopend), gaf 2,009 gr. stof aan afzetsel met broomwater 1,141 gr. (na twee dagen 1,12), alzoo 0,08 gr. op 0.15 gr. stof (na aftrek van alkohol).

Van een nieuwe bereiding in een goed gesloten fleschje bewaard, niet minder dan negen maanden, gaf 1,991 gr. aan broomafzetsel 0,938 (na twee dagen 0,929 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,07 gr. (na aftrek van alkohol).

Een soort uitzondering vormde een product (oud vijf maanden) na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding), in zooverre als het eerder vast werd, terwijl andere dergelijke produkten vloeibaar bleven; en met broomwater zeer veel afzetsel werd verkregen. Een hoeveelheid van 0,691 gr. stof gaf 0,811 gr. broomafzetsel (na drie dagen 0,8025), berekend op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,176 gr..

In de volgende tabel wordt een overzicht gegeven van de bepalingen met broomwater:

A. bevat de bepalingen met n. cyanuurzuur aethyl (zie later);

B. die met ruw product;

C. de bepalingen met het lichaam van Cloëz;

D. die met ruw product na staan onder een exsiccator;

E. ruw product na staan onder een exsiccator en uitkrystallisatie van amido-verbinding;

F. bevat een bepaling met een product afgeleid van dat

*) B. IV, 437.

onder E vermeld, welk laatste bij staan vastgeworden, tusschen filtreerpapier werd gedaan, waarna dit papier met aether werd uitgetrokken, bij verdampen van welken aether het bedoelde product terugbleef:

Aantal bepalingen.	A *)	B †)	C §)	D **)	E ††)	F §§)
1.	0,279	0,034	0,0873	0,0888 *a*)	0,119 (5 m.)	0,135
2.	0,3515	0,032	0,13 (na 5 m.)	0,0909 (na 1 m.)	0,109 (8 m.)	
3.	0,295	0,032	0,159 (na 16 m.)	0,1 *b*)	0,176 (5 m.)	
4.	—	0,038	0,142	0,0445 (ouderdom onbekend)		
5.	—	0,043	0,146			
6.	—	0,08 (5 m.)	0,146			
7.	—	0,07 (9 m.)	0,144			
8.	—	—	0,149 (na 8 w.)			

De hoeveelheid broomafzetsel is uitgedrukt in gr. en berekend op 0,15 gr. stof, na aftrek van alkoholgehalte. Bij de bepaling werd 0,6 gr. vloeibaar of vast product, namelijk ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding) of lichaam van Cloëz of n. cyanuurzuur aethyl, of 1 gr. ruw product, opgelost in 100 C. C. water en neêrgeslagen met 42 C. C. broomwater.. Ouderdom is, zoo noodig, opgegeven in weken (w.) en maanden (m.). De bepalingen werden gedaan bij een betrekkelijk lage temperatuur (en niet gedurende den zomer).

---

*) B. III, 16; B. IV, 427.

†) B. IV, 427, 428; B. V, 377.

§) B. III. 164; B. IV, 432, 433; B. V, 390.

**) B. IV, 427; B. V, 376.

††) B. IV, 435; B. V, 377.

§§) B. V, 375, 376.

a) Versch ruw, aanvankelijk 0,043, zie onder B.

b) Versch ruw 0,038, zie onder B.

Nogmaals *) zij opgemerkt, dat de methode met broomwater niet boven alle bedenking is verheven, en dit meer bepaalt geldt van de berekening bij de bepaling van het gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl gevolgd. Deze berekening baseert zich op de hoeveelheid broomafzetsel verkregen uitgaande van n. cyanuurzuur aethyl (welk afzetsel evenwel een vreemd verschijnsel vertoonde), thans wat nader nagegaan.

I. 0,329 gr. n. cyanuurzuur aethyl naar de vroegere methode verkregen gaf 0,476 gr. broomafzetsel (na drie dagen 0,4655), op 0,15 gr. stof bedragende 0,217 gr. afzelsel †).

II. 0,305 gr. n. cyanuurzuur aethyl, uit een waterige oplossing bij lage temperatuur afgezet, gaf 0,462 gr. broomafzetsel (na twee dagen 0,371), op 0,15 gr. stof alzoo 0,227 gr..

III. 0,3025 gr. cyanuraat, erlangd als dat van II, gaf 0,459 gr. afzetsel (na drie dagen 0,439); alzoo op 0,15 gr. stof 0,227 gr..

IV. 0,3215 gr. cyanuraat (als II) gaf (met 0,285 gr. alkohol bij de oplossing, eene betrekkelijke hoeveelheid zoo ongeveer in ruw product voorkomende) aan broomafzetsel 0,481 gr. (na drie dagen 0,457 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,224 gr..

Deze bepalingen leveren dus niet het vreemde verschijnsel op, van in 't begin betrekkelijk zoo snel af te nemen in gewicht, wellicht vroeger het gevolg daarvan, dat onder eenigzins andere omstandigheden, zoo b. v. bij een andere temperatuur, werd gewerkt.

Het gehalte van ruw product, lichaam van Cloëz enz. aan n. cyanuurzuur aethyl is naar deze bepalingen hooger. Later wordt hierop teruggekomen.

Samenstelling van versch ruw product. Uitgaande van de vijf eerste bepalingen onder B, betrekking hebbende op versch ruw product, geeft dit gemiddeld 0,035 gr. broomafzetsel op 0,15 gr. stof, als altijd na aftrek van alkoholgehalte.

---

*) B. IV. 427, 431.

†) Met dit zijn ook later bepalingen gedaan met subblmaat.

Daarbij is tevens begrepen het broomafzetsel van amido-verbinding, van welke laatste zoo ongeveer 3 p. c. voorkomt in versch ruw product, terwijl dit ongeveer 40 p. c. alkohol bevat. Er blijven alzoo 57 gew.-d. over voor n. aethylcyanaat en cyanuraat in 100 gew.-d. versch ruw product. Het broomafzetsel bedraagt berekend op versch ruw product 14 p. c., dat van amido-verbing er onder begrepen. Laat eens worden aangenomen: dat amido-verbinding evenveel broomafzetsel geeft als n. cyanuurzuur aethyl, en het broomafzetsel worden genomen voor de oorspronkelijke stof, dan zou versch ruw product (alkoholgehalte niet afgetrokken) bevatten $14 - 3 = 11$ p. c. n. cyanuurzuur aethyl. Dit gehalte is evenwel te hoog, indien men let op de bepalingen van n. cyanuurzuur aethyl met broomwater. Het gehalte van versch ruw product aan n. aethylcyanaat zou dan in ieder geval minstens $57 - 14 = 43$ p. c. kunnen bedragen.

Dialyse van ruw product. In een cylindervormig glazenvat (te sluiten met glazen stop) werd geplaatst een kleine dialysator (rustende op platina pootjes), en gedialyseerd met (zuiveren) alkohol, terwijl ruw product werd gedaan in den dialysator. Na de proef bleek, dat zoowel het dialysaat als het teruggeblevene in den dialysator na staan (onder een exsiccator) n. cyanuurzuur aethyl afzette; niet zoo spoedig het geval met het dialysaat, dat de grootste hoeveelheid uitmaakte. Hieruit zou volgen, dat het hoofdbestanddeel van ruw product goed dialyseert.

Verzeepen met alkaliën. A. In waterige oplossing, a. met natriumhydroxyde. Bij verzeepen met sodaloog van ruw product, dit na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding), zouden kunnen optreden: $OCNNa$, $C_3N_3O_3HNa_2$ en CO_3Na_2, daarenboven NH_3, terwijl tevens kunnen aanwezig zijn onontleed $NCOC_2H_5$, $N_3C_3.3OC_2H_5$ en niet gebruikt $NaOH$, enz.. De gevolgde methode ter afzondering van mogelijk gevormd natriumcyanaat berust op deze eigenschappen:

1. Natriumcyanaat: $OCNNa$ wordt niet ontleed in water-alkoholische oplossing door kooldioxyde onder de later mede te deelen omstandigheden. Aether doet het cyanaat uitkrystalliseeren.

2. Natriumhydroxyde kan uit de water-alkoholische oplossing door kooldioxyde worden omgezet in natriumcarbonaat daarin onoplosbaar.

3. Natriumcyanuraat en wel: $C_3N_3O_3HNa_2$ wordt uit een waterige oplossing gemakkelijk neêrgeslagen door alkohol.

Wat betreft:

1. Zoo werd 0,2 gr. kaliumcyanaat, genomen in plaats van natriumcyanaat, opgelost in 6 C.C. water, en hierbij gevoegd 80 C.C. abs. alkohol. Na een halven dag te hebben gestaan was niets afgezet, evenmin het geval na toevoegen op nieuw van 80 C.C. alkohol. Door de oplossing werd geleid kooldioxyde, waardoor geen troebeling intrad, wel het geval, toen een overeenkomstige mol. hoeveelheid kaliumcarbonaat werd opgelost in 6 C.C. water met 160 C.C. alkohol. De oplossing van kaliumcyanaat werd dan ook niet neêrgeslagen met baryumnitraat, wel door loodnitraat. Uit de oplossing van kaliumcyanaat werd na 10 dagen wat afgezet van een krystallijne stof, in waterige oplossing de reacties gevende van cyanaat.

Een hoeveelheid van 0,2 gr. kaliumcyanaat in 6 C.C. water met 160 C.C. alkohol, na een halven dag staans, met 80 C.C. aether (ongezuiverd), liet een deel van het cyanaat afgezet worden, meer aether nog wat. Bij een andere dergelijke proef, werd de aether telkens met 40 C.C. toegevoegd, waarbij bleek, dat de eerste 40 C.C. zoo goed als niets deden afgezet worden. De tijd van staan der alkoholisch waterige oplossing schijnt eenigen invloed uit te oefenen op de snelheid van afzetten door aether (in den regel liet men na bijvoegen van alkohol en aether een halven dag staan). Proeven met 8 C.C. water (in plaats van 6 C.C., zie boven), leidden tot nagenoeg dezelfde uitkomst, maar er was dan betrekkelijk meer aether noodig (op dezelfde hoeveelheid alkohol, en na een halven dag staans der alkoholisch-waterige oplossing).

2. Een hoeveelheid natriumcarbonaat overeenstemmende met 0,2 gr. natriumcyanaat in de verhouding uitgedrukt door CO_3Na_2 en $2OCNNa$, werd opgelost in 6 C.C. wa-

ter; 80 C.C. alkohol deden een goed deel afzetten, nog 80 C.C. alkohol slechts zeer weinig.

Bij een sodaoplossing van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water werden 160 C C. alkohol gedaan, en kooldioxyde doorgeleid. Zoodra de massa geleiachtig was geworden, liet men deze een halven dag staan, waarna werd gefiltreerd; op nieuw leiden van kooldioxyde door het filtraat deed, ook in volgende proeven, in den regel niets meer afgezet worden. Aether en wel 80 C.C. gaf slechts zeer weinig van een afzetsel, meer aether deed niets afgezet worden.

3. Van cyanuurzuur werd 0,2 gr. genomen, hierbij gedaan 6 C.C. water, en ter oplossing 0,5 C.C. sodaloog van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water. Toegevoegd werden 80 C.C. alkohol, die een geleiachtig neêrslag gaven van $C_3N_3O_3HNa_2$. Door het filtraat werd kooldioxyde geleid, gefiltreerd enz.; aether vormde slechts zeer weinig van een afzetsel. Een overeenkomstig resultaat werd erlangd met 0,2 gr. cyanuurzuur met sodaloog van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water, enz..

Nadere contrôle der methode. 0,2 gr. kaliumcyanaat werd opgelost in 1 C.C. water, sodaloog toegevoegd van 0,8 gr. natrium en 6 C.C. water, verder 160 C.C. alkohol, kooldioxyde doorgeleid enz.. Het filtraat gaf met 80 C.C. aether een afzetsel van cyanaat.

Aangaande de gevoeligheid der reactie op cyanaat met loodnitraat kan worden medegedeeld, dat 0,1 gr. kaliumcyanaat in 50 C.C. water nog een duidelijk neêrslag daarmede geeft.

Met sublimaat gaf een oplossing van 0,1 gr. kaliumcyanaat op 3 C.C. water geen neêrslag met een oplossing van 1 gr. sublimaat op 20 C.C. water; bij staan echter ontstaat wel een neêrslag.

Verzeepen der produkten met soda in waterige oplossing. Bij 1 gr. ruw product werd gedaan sodaloog van 0,8 gr. natrium

op 6 C.C. water in een platinumbuis, geplaatst in een glazen buis, en bij 80° verhit gedurende zeven uur. Bij openen was geen spanning, maar werd een eigenaardige *doordringende reuk* waargenomen; de massa was geleiachtig en bleef dit bij uitspoelen met alkohol (vorming van $C_3N_3O_3HNa_2$). Na toevoegen van 160 C.C. alkohol werd kooldioxyde doorgeleid, gefiltreerd enz., aether deed geen cyanaat afzetten. Bij de volgende proeven werd 0,4 gr. natrium op 6 C.C. water genomen, om het verzeepen van n. cyanuurzuur aethyl zoo mogelijk tegen te gaan. Ruw product bij 80° gedurende vijf uur verwarmd en verwerkt onder overigens dezelfde omstandigheden, bleek slechts ten deele verzeept te zijn, terwijl alkohol een afzetsel gaf; aether deed (na doorvoeren van kooldioxyde enz.) geen cyanaat afzetten.

Ruw product *na staan* (en uitkrystallisatie van amidoverbinding) en wel 0,6 gr. (overeenkomende met ongeveer 1 gr. ruw product), werd als vroeger verhit bij 80° gedurende vier uur; een deel was niet verzeept. Alkohol gaf een weinig afzetsel; na doorvoeren van kooldioxyde enz. gaf aether geen afzetsel van cyanaat.

De uitslag is ten deele, zooals mocht verwacht worden; toch scheen het wenschelijk deze proeven te nemen om reden vroeger medegedeeld.

Ten einde te weten, of n. cyanuurzuur aethyl ook werd omgezet in isocyanuurzuur en dit in isocyaanzuur, werd genomen 0,3 gr. n. cyanuurzuur aethyl (sodaloog van 0,6 gr. natrium op 6 C.C. water) en te werk gegaan als bij de twee laatste proeven (verhit werd vier uur bij 80°). Er bleef terug 0,137 gr.; van de 0,163 gr. werd niets teruggevonden, in zooverre als alkohol geen neêrslag gaf van $C_3O_3N_3HNa_2$, noch van CO_3Na_2, terwijl na doorvoeren van kooldioxyde enz. aether geen cyanaat deed afzetten. De uitkomst dezer proef is alzoo in overeenstemming met het vorige.

Verzeeping van ruw product kan ook plaats hebben bij gewone temperatuur, sneller indien alkohol ter oplossing is bijgevoegd, en de sodaloog sterker wordt genomen (b. v. 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water). Na weken te hebben gestaan

geeft dan alkohol een geleiachtig neêrslag. Zonder alkohol ontstond na vele weken een krystallijn afzetsel. Deze proeven werden voortgezet.

N. cyanuurzuur aethyl lost bij gewone temperatuur op in sodaloog (van 0,4 natrium op 6 C.C. water), terwijl deze oplossing niet wordt neêrgeslagen door alkohol, als het geval is met isocyanuurzuur onder overeenkomstige omstandigheden (wel had dit plaats na verhitten der oplossing gedurende 24 uur bij 80^0). Bij gemelde proef ontstaat meergemeld lichaam met eigenaardigen reuk niet.

b. Verzeepen met potassa in waterige oplossing. De volgende proeven waren reeds gedaan, toen werd besloten ter verzeeping soda te nemen. Er werd ook hierbij gebruik gemaakt van een platinabuis. Bij 0,1 gr. cyanuurzuur werd gedaan 3 gr. potassaloog van 16,6 p. c., vervolgens geneutraliseerd met zoutzuur, en na een dag het afzetsel $C_3 N_3 O_3 H_2 K$ gebracht op een klein gewogen filtrum, tweemaal doorgespoeld, vervolgens gedroogd en gewogen; van gemeld zout werd verkregen 0,063 gr.. Uitgaande van 0,2 gr. cyanuurzuur werd aldus te werk gaande, erlangd 0,108 gr.. Bij staan zet zich nog wat af uit het filtraat en waschwater. Verhit bij 80^0 gedurende 24 uren gaf 0,1 gr. cyanuurzuur aldus 0,055 gr. afzetsel; bij 100^0 verhit slechts 0,02 gr. en bij 120^0 (tevens 24 uren) was al het cyanuurzuur ontleed.

Van n. cyanuurzuur aethyl gaf 0,1 gr. behandeld op gemelde wijze, verhit bij 80^0 gedurende 24 uren geen afzetsel, terwijl nog 0,07 gr. ontleed was teruggebleven. Een hoeveelheid van 0,1 gr. gaf bij 120^0 gedurende 24 uren, verhit, geen afzetsel. Bij 150^0 verhit gedurende 24 uren gaf 0,1 gr. n. cyanuurzuur aethyl tevens geen afzetsel.

Van ruw product gaf 1 gr. bij 80^0 gedurende 24 uren, ook met 3 gr. potassaloog van 16,6 p. c. aan afzetsel, naar dezelfde methode, 0,065 gr.; verhit bij 120^0 een hoeveelheid van 0,038 gr..

Van ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding), gaf 0,41 gr. met 6 gr. loog bij 80^0 gedurende 24 uren verhit genoegzaam geen afzetsel, daaren-

tegen was van een vaste stof teruggebleven, en wel 0,17 gr.. Een bepaling met broomwater leidde er toe, dit product te beschouwen als bestaande voor ongeveer de helft uit n. cyanuurzuur aethyl.

Bij werken met sodaloog van gemelde sterkte werd een terugblijven van een vaste stof niet waargenomen.

B. Verzeepen met alkaliën in alkoholische oplossing *). De wijze van verzeepen was deze. In een platinabuis werd gedaan 1 gr. kaliumhydroxyde, deze buis daarna gedaan in een glazenbuis, dan gedeeltelijk uitgetrokken, 5 C.C. werkelijk abs. alkohol †) toegevoegd, verder de te verzeepen stof, toegesmolten, en verhit in een lucht-oliebad voorzien van een gasregulator. Na de proef werd de vloeibare inhoud uitgestort in een kolfje, het terugblijvende met 6 C.C. water opgelost en bij het eerste gedaan, volgen 155 C.C. (gewone) abs. alkohol; vervolgens werd kooldioxyde doorgeleid tot de massa geleiachtig was geworden. Na een halven dag werd gefiltreerd, en weder kooldioxyde doorgeleid. Bleef de vloeistof helder, zooals steeds het geval was, dan werden 40 C.C. aether toegevoegd en dit herhaald.

Vergelijkende proeven werden gedaan met kaliumhydroxyde zonder te verzeepen stof en overigens verhit enz. als bij een bepaalde proef; zoo ook met eenig kaliumcyanaat en verder met kaliumhydroxyde en alkohol verhit enz. als anders. De uitkomsten waren niet geheel naar wensch, en vooral scheen het CO_3KH bezwaar op te leveren, dat zich in kleine hoeveelheid afzettende geen neêrslag gevende met $BaCl_2$, wel bij verwarming, dus zooals OCNK. Pogingen werden dus aangewend, om het gebruik van kooldioxyde te ontgaan.

Afzonderen van kaliumcyanaat zonder kooldioxyde. Genomen werd 0,2 gr. kaliumcyanaat en dit met kaliumhydroxyde en alkohol in de verhouding als vroeger bij 80° verhit

---

*) B. IV. 439. In de *Ber. d. Deutsch. Chem. Ges.* Jahrg. 16, 276 staat bij vergissing „alkoholische Kali", terwijl GAL verzeepte met potassa opgelost in water.

†) B. II. 5.

gedurende vier uur. Na de proef werd water bijgedaan, en op een deel der oplossing gereageerd, na toevoeging van eenig zoutzuur, op ammoniak met NESSLER's reagens, welke reactie zeer duidelijk zich vertoonde. Na toevoeging van alkohol (steeds in bovengemelde verhouding) werd aanvankelijk iets van een afzetsel gevormd, dat gemelde reactie niet gaf, evenmin het afzetsel ontstaan na bijvoeging van 40 C.C. aether; daarentegen dat na bijdoen van 80 C.C. aether en zichtbaar krystallijn, gaf zeer duidelijk de reactie op ammoniak in zure oplossing; een nieuwe 40 C.C. gaf nog iets afzetsel van kaliumcyanaat.

Met 't oog op later te nemen proeven werd 0,2 gr. kaliumcyanaat, in de bekende verhouding, met potassa en alkohol bij 120^0 verhit gedurende 24 uren, en verwerkt als naar gewoonte. De oplossing van toevoeging van water gaf als zoodanig geen reactie op ammoniak met NESSLER's reagens, daarentegen wel na bijvoegen van zoutzuur. Na toevoegen van alkohol, filtratie en bijdoen van aether tot 160 C.C. werd wel iets afgezet, maar niet gevende gemelde reactie op cyaanzuur.

Ter verzeeping werd genomen. ruw product (oud zes maanden; had met broomwater gegeven 0,08 gr. afzetsel op 0,15 gr. stof); steeds werden dezelfde verhoudingen genomen, en 1 gr. stof op 1 gr. kaliumhydroxyde. Verhit bij 80^0 gedurende vier uur gaf de waterige oplossing (zie boven) met zoutzuur geen reactie op ammoniak, zelfs niet bij verhitten gedurende 24 uur. Bij 100^0 gedurende 24 uur verwarmd, gaf de vast geworden massa na toevoegen van water (16 C.C.) geen reactie op ammoniak in zure oplossing (wel een licht oranje gekleurd neêrslag). Alkohol (155 C.C.) gaf in deze en overeenkomstige gevallen een geleiachtig neêrslag, na staan onder een exsiccator een amorph lichaam, oplosbaar in water, geen reactie gevende op cyaanzuur. Dit neêrslag ontstond niet uitgaande van potassa alleen, of dit met 0,2 gr. kaliumcyanaat onder overigens gelijke omstandigheden (verhitten enz.). Veelal was een sterke reuk waarneembaar na verzeepen van ruw product; met ruw product na staan, niet het geval bij verhitten bij

80° gedurende 24 uur. Nu en dan was bij het doen der waterige oplossing van zoutzuur wat te zien van een nevel, zonder dat het reagens van NESSLER de bekende reactie vertoonde van ammoniak (of amine); wel ontstond een neêrslag wat licht oranje gekleurd.

Verzeeping kan reeds intreden bij gewone temperatuur (en tevens vorming van een lichaam met doordringenden reuk, herinnerende aan dien van een carbylamine, niet aan $OCNC_2H_5$), waarbij de massa geleiachtig wordt. Na oplossing in water, weder geen duidelijke reactie met gemeld reagens op ammoniak. De oplossing gaf met alkohol zeer weinig afzetsel. Bij neutralisatie met zoutzuur werd geen $C_3N_2O_3H_2K$ afgezet, evenmin in de andere proeven. Dit laatste trad wel in bij verzeepen bij 120° gedurende 24 uur; water (6 C.C.) vormde een troebele massa, zoutzuur deed nog meer afzetten, alles in meer zuur oplosbaar, met NESSLER's reagens de reactie op ammoniak gevende. Bij herhaling dezer proef bleek, dat de waterige oplossing (na filtratie) zonder zoutzuur gemelde reactie gaf. Verder verwerkt, werd bij geen der voorgaande proeven met aether, uit de oplossing kaliumcyanaat afgezet.

Onder gemelde omstandigheden treedt alzoo kaliumcyanaat niet op als ontledingsproduct bij verzeepen van ruw product in alkoholische oplossing met kaliumhydroxyde.

Verzeepen met sublimaat *). Bij 2 gr. ruw product werd gevoegd 0,5 gr. sublimaat en verhit, in een toegesmolten buis, aanvankelijk tot 100°, daarna tot 110° en ten slotte tot 120°; bij openen bleek weinig spanning te zijn. In een volgende proef werd dadelijk verhit tot 120°; de uitkomst was dezelfde, alleen was de massa wat meer gekleurd geworden dan bij de vorige proef het geval was, terwijl het sublimaat meerendeels scheen ingesloten door een onoplosbare verbinding, die ontstond. Daarom werd thans het sublimaat

---

*) B. IV. 438.

opgelost in aether (gezuiverd) en hierbij het ruwe product gedaan, terwijl werd verwarmd bij 120° gedurende 4 uur. Hetzelfde werd herhaald zonder verhitten. Beide produkten verhielden zich op overeenkomstige wijze tegenover sodaloog (0,4 gr. natrium op 6 C.C. water), waarbij geen mercurioxyde werd afgescheiden, maar een kleurlooze vaste stof ontstond; na toevoeging van alkohol werd deze eerst opgelost, maar met meer alkohol (in 't geheel 160 C.C.) weder afgezet. Het kwam geschikter voor uit te gaan van ruw product na staan (genoegzaam gezuiverd van amidoverbinding). Gelijke gew.-hoev. hiervan en sublimaat werden verhit, en onder dezelfde omstandigheden tevens n. cyanuurzuur aethyl. Eenige gasontwikkeling ving aan bij 130°—140° en hield op bij 150°—160°. Op 0,6 gr. stof had een vermindering plaats in gewicht bedragende voor ruw product na staan 0,1 gr. en n. cyanuurzuur aethyl 0,12 gr.. Het product met n. cyanuurzuur aethyl gaf met sodaloog (sterkte als vroeger) dadelijk een *geel* afzetsel, dat met ruw product na staan een eveneens vaste massa, maar die zeer langzaam werd aangetast (het vorige werd gemakkelijk ontleed), en er ontstond een volumineus genoegzaam *kleurloos* afzetsel.

Het product met n. cyanuurzuur aethyl, behandeld met sodaloog, werd gefiltreerd, kooldioxyde doorgeleid, na toevoeging van 160 C.C. alkohol (waarbij geen neêrslag ontstond) gefiltreerd, ter contrôle andermaal kooldioxyde doorgeroerd, waarbij de vloeistof helder bleef; 80 C.C. aether vormde zeer weinig van een amorph afzetsel, het filtraat gaf met 80 C.C. aether daarenboven geen afzetsel. Deze proeven werden voorloopig niet voortgezet (zie later).

Sublimaat als middel ter scheiding van n. aethyl-cyanuraat en cyanaat. Een hoeveelheid van 0,317 gr. n. cyanuurzuur aethyl (gekrystalliseerd uit alkohol) werd opgelost in water (0,6 gr. stof op 100 C.C. water), en wat alkohol toegevoegd (0,4 gr. op de 0,6 gr. stof) ter betere vergelijking met ruw product (alkohol bevattende). Bij deze oplossing deed men 15,8 C.C. sublimaatoplossing (24,954 gr. op 500 C.C. water), overeenkomende met de dubbele theoretische

hoeveelheid (15 C.C. op 0,6 gr. n. cyanuurzuur aethyl is de theoret. hoev.); na een halven dag te hebben gestaan werd gefiltreerd. Het afzetsel bedroeg 0,659 gr., terwijl het filtraat met sublimaatoplossing geen neêrslag meer gaf.

Een hoeveelheid van 0,319 gr. n. cyanuurzuur aethyl (gekrystalliseerd uit water bij lage temperatuur) gaf onder genoegzaam gelijke omstandigheden (evenwel zonder alkohol) met dezelfde sublimaatoplossing 0,661 gr. neêrslag *); het filtraat gaf niets meer.

De verbinding van n. cyanuurzuur aethyl met sublimaat heeft naar PONOMAREFF †) tot formule: $C_3N_3 . 3OC_2H_5, HgCl_2$, zoodat van 100 gew.-d. n. cyanuurzuur aethyl 227 gew.-d. aan deze kwikverbinding zou moeten verkregen worden. De eerste bepaling komt overeen met 208 gew.-d. sublimaatverbinding op 100 gew.-d. n. cyanuurzuur aethyl, de tweede verbinding met 207 gew.-d., dat voldoende overeenstemt.

Het was nu van veel belang te weten, hoe ruw product en dit na staan, alsmede het lichaam van CLOËZ zich verhield quantitatief tegenover sublimaatoplossing.

Van ruw product (oud negen maanden) in dezelfde verhouding in water opgelost en onder gelijke omstandigheden zooveel mogelijk neêrgeslagen met sublimaat, gaf 1,021 gr. aan afzetsel 0,6985 gr. en het filtraat nog 0,063 gr. Aangenomen een gehalte aan alkohol van 40 p. c. komt 1,021 gr. ruw product overeen met 0,6126 gr. zonder alkohol, zoodat dan 0,6126 gr. product geven 0,7615 gr. afzetsel, of op 100 gew.-d. aan afzetsel 124 gew.-d. Alles gerekend als n. cyanuurzuur aethyl, zoo ook het gehalte aan amidoverbinding, zou dit neêrslag overeenkomen met 59,6 p. c. n. cyanuurzuur aethyl. Met broomwater had dit product op 0,15 gr. (alkohol afgetrokken) gegeven 0,07 gr. broomafzetsel, of op 100 gew.-d. aan afzetsel 46 gew.-d..

Van een versche bereiding gaf 1,0665 gr. ruw product

---

*) Met. n. cyanuurzuur aethyl van deze twee bereidingen, werden de bepalingen gedaan met broomwater, vroeger in deze verhandeling medegedeeld (p. 379).

†) *Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch.* Jahrg. 15. 513.

onder dezelfde omstandigheden neêrgeslagen aan afzetsel met de sublimaatoplossing 0,93 gr. en de moederloog nog daarenboven 0,046 gr., alzoo te zamen: 0,976 gr. van 1,0665 gr. product. Alkoholgehalte afgetrokken, komt 1,0665 gr. ruw product overeen met 0,64 gr., dan gevende op 100 gew.-d. aan sublimaatafzetsel: 145 gew.-d.. Met broomwater gaf dit product van 2,001 gr. aan broomafzetsel 0,9775 gr., dus op 0,15 gr. stof, alkoholgehalte afgetrokken, 0,119 gr.. Bij de bereiding van dit product was de alkohol wellicht niet zoo watervrij als in den regel het geval was, zoodat deze proef is te herhalen.

Hetzelfde product werd thans neêrgeslagen met de helft der vroeger genomen sublimaatoplossing. Een hoeveelheid van 1,038 gr. gaf 0,668 gr. afzetsel. Het filtraat verdampt onder een exsiccator zette een geleiachtige massa af; in 't geheel bleef na droogen terug 0,282 gr., alzoo bedraagt alles te zamen 0,95 gr.. Vrij sublimaat was wel in deze 0,282 niet aanwezig; daar dit na staan met water een oplossing gaf, een kleurloos neêrslag vormende met natriumcarbonaat. Opmerkingswaardig is, dat gemeld filtraat na indampen tot droog in een exsiccator (met zwavelzuur) een lichaam achterliet met den aangenamen reuk eigen aan ruw product na staan (en lichaam van Cloëz).

Een hoeveelheid van 0,641 gr. van het lichaam van Cloëz, waarmede vroeger werd gewerkt, gaf met de sublimaatoplossing 1,05 gr. afzetsel, en de moederloog daarenboven 0,037 gr., dus te zamen 1,087 gr. afzetsel, op 100 gew.-d. overeenkomende met 169 gew.-d. sublimaatverbinding.

Met broomwater gaf dit laatste product *) van 0,585 gr. aan broomafzetsel 0,621 gr. (na twee dagen 0,589 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,159 gr..

Gemelde hoeveelheid van 169 gew.-d. sublimaatverbinding van 100 gew.-d. van gemelde bereiding van het lichaam van

*) B. III, 159; B. IV. 431, 432. Bij het staan gedurende 16 maanden onder een exsiccator was 3,9146 gr. dezer bereiding van het lichaam van Cloëz herleid tot 3,7086 gr., alzoo afgenomen 0,213 gr.. Ter vergelijking met de vorige broombepaling is 0,585 gr. te veranderen in 0,6186 gr., dat dan geeft op 0,15 gr. stof aan afzetsel met broomwater 0,15 gr..

Cloëz zou overeenkomen met een gehalte van 81,3 p. c. n. cyanuurzuur aethyl (100 : x = 207,5 : 169).

Het gemiddelde der vier laatste bepalingen *) van n. cyanuurzuur aethyl met broomwater, zoo ongeveer onder dezelfde omstandigheden genomen als bovengemelde bepaling, geeft 0,224 gr. broomafzetsel van 0,15 gr. n. cyanuurzuur aethyl, waarnaar 0,159 gr. afzetsel zouden bevatten 0,106 gr. n cyanuurzuur aethyl, dus 70 p. c.; zie later over bepalingen naar een andere methode (de formule: $C_3N_3 . 3OC_2H_5$, $NC . OC_2H_5$ eischt 75 p. c.).

De volgende analysen werden verricht.

I. Dit product heeft betrekking op de sublimaatverbinding erlangd met ruw product, dat twee maanden oud was. Een hoeveelheid van 0,6089 gr. stof gaf 43,5 C.C. stikstof bij 768,2^{mm} (corr.) en 6,7^0.

II. Afkomstig van ruw product, oud vijf maanden, dat in twee gedeelten werd neêrgeslagen. De bepaling betreft het eerste neêrslag. Een hoeveelheid van 0,5532 gr. stof gaf 40 C.C. stikstof bij 773,9^{mm} (corr.) en 2,8^0;

0,4903 gr. stof gaf 0,3947 gr. kooldioxyde en 0,148 gr. water.

III. Heeft betrekking (zie II) op het (tweede of) laatste neêrslag (met overmaat van sublimaat verkregen). Een hoeveelheid van 0,6532 gr. stof gaf 46,4 C.C. stikstof bij 750,93^{mm} (corr.) en 8^0.

Op 100 gew.-d. stof komen bovenstaande gegevens overeen met:

	I.	II.	III.	$C_3N_3 . HOC_2H_5, HgCl_2$ eischt:
Koolstof		21,9		22,2
Waterstof		3,3		3,1
Stikstof	8,7	9,0	8,5	8,7.

Deze verbindingen waren met opzet niet omgekrystalleerd; de neêrslagen, zeer volumineus, eerst geplaatst tusschen filtreerpapier bij herhaling verversch̆t, en na genoegzaam

*) Zie deze Verhandeling pag. 379.

van moederloog te zijn bevrijd, geplaatst tusschen filtreerpapier onder een exsiccator.

Deze verbindingen vormen een uiterst ligt glanzende massa, naar 't schijnt bij allen kleine naalden. Het smeltpunt is ongeveer 115^0, terwijl bij omstreeks 130^0 gasontwikkeling (van C_2H_5Cl) aanvangt. Tevens is dit het geval met de verbinding van n. cyanuurzuur aethyl en sublimaat. In verband met de groote hoeveelheid sublimaatverbinding gevormd door ruw product en dit na staan, zoo mede van het lichaam van Cloëz, lag de vraag niet verre, of hier gedacht moet worden aan polymerisatie, misschien ook aan de vorming eener verbinding van aethylcyacaat met sublimaat, of aethylcyanaat-cyanuraat met sublimaat. Al spoedig bleek eenig verschil te bestaan tusschen de verbinding van n. cyanuurzuur aethyl en sublimaat en die verkregen met ruw product, ruw product na staan en lichaam van Cloëz, behoudens bovengemelde overeenstemming betreffende smeltpunt. Meer bepaald werd dit nagegaan van twee der producten geanalyseerd (II en III van zoo even) en twee anderen (zie later).

II. Wordt een oplossing van n. cyanuurzuur aethyl zoo goed als dadelijk door de sublimaatoplossing neêrgeslagen (terwijl eenige alkohol daarop geen merkbaren invloed uitoefent), is dit veelal anders het geval met andere producten en meer bepaald met ruw product, dat veelal aanvangt met een *opaliseerende* oplossing te geven, hoegenaamd niet het geval met n. cyanuurzuur aethyl.

Het was opgevallen, dat de sublimaatverbinding van n. cyanuurzuur aethyl met kaliumcarbonaat dadelijk geeft een bruinroode verbinding, niet het geval b. v. met product I in verschen staat, wel soms na droogen onder een exsiccator. Dit verschijnsel werd eenigermate quantitatief vervolgd met natriumcarbonaat. Een hoeveelheid van ongeveer 0,6 gr. der verbinding van sublimaat met n. cyanuurzuur aethyl werd ontleed met een verdunde waterige oplossing van natriumcarbonaat, de theoretische hoeveelheid aan dit zout ter ontleding bevattende (CO_3Na_2 op $HgCl_2$); de *bruinroode* kwikverbinding ontstond (onder vrijkomen van

n. cyanuurzuur aethyl). Onder genoegzaam dezelfde omstandigheden werd 0,622 gr. van II behandeld. Naar 't voorkwam ontstond betrekkelijk weinig van gemeld bruinrood basisch kwikzout maar meer van een *kleurloos vlokkig* lichaam.

III. Genoegzaam overeenkomstig met II verhield zich dit neêrslag; voor deze proef werd genomen 0,582 gr..

Ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amidoverbinding) leverde hetzelfde verschijnsel op (genomen werd 0,537 gr. der kwikverbinding), en tevens de sublimaatverbinding gemaakt met het lichaam van Cloëz, eener bereiding waarmede vroeger was gewerkt *) (genomen werd voor de proef 0,609 gr. aan sublimaatverbinding).

De verbinding van n. cyanuurzuur aethyl lost geheel op in water, die van II (na droogen onder een exsiccator) gaf een melkachtig troebele vloeistof, tevens eenigzins het geval met III. Onder genoegzaam gelijke omstandigheden behandeld met sodaloog (zuiver), werd de sublimaatverbinding van n. cyanuurzuur aethyl zoo goed als geheel opgelost; slechts uiterst weinig kwikoxyde werd afgezet; van II gaf het sodaloog een weinig kleurloos afzetsel, terwijl III geheel helder bleef. Ook tegenover zilvercarbonaat schijnt de verhouding eenigzins anders te wezen. De sublimaatverbinding van n. cyanuurzuur aethyl wordt namelijk ontleed naar de te verwachten wijze ($HgCl_2 + CO_3Ag_2 = CO_2 + 2ClAg + HgO$, terwijl n. cyanuurzuur aethyl vrijkomt), maar het eerste neêrslag van ruw product met sublimaat geeft met zilvercarbonaat een troebele massa, zelfs na vrij lang staan niet helder bezinkende, en een violette kleur aannemende (blijkbaar door het chloorzilver); het filtraat is kleurloos en geeft met broomwater, als dat van n. cyanuurzuur aethyl, de bekende reactie.

De vraag is te beantwoorden, of men hier heeft te doen met een meer schijnbaar verschil als gevolg eener verontreiniging, of met een geval van isomerie. Amido-verbinding vereenigt zich ook met sublimaat, terwijl deze combinatie

*) B. III, 159; B. IV, 431, 432; B. V, pag. 390.

bij ontleding met kaliumcarbonaat een genoegzaam kleurloos ontledingsproduct geeft. De medegedeelde analysen duiden hierop niet ($C_3N_3 . 2OC_2H_5$, NH_2, $HgCl_2$ eischt 12,2 p. c. stikstof). De laatste verbinding vormt na droogen een krystallijn poeder, zeer gemakkelijk te onderscheiden van de andere neêrslagen, zoo ook bij praecipitatie. Amido-verbinding geeft een weinig opaliseerende vloeistof met sublimaat alvorens de verbinding neêrslaat, welk laatste echter spoedig volgt. In het ruw product na staan (vroeger gebruikt) en het lichaam van CLOËZ kan amido-verbinding bezwaarlijk in noemenswaardige hoeveelheid voorhanden wezen. De volgende bepalingen werden gedaan.

Van een oplossing van natriumcarbonaat in water werd gedaan bij gedroogde neêrslagen met sublimaat, verondersteld allen te zijn $C_3N_3 . 3OC_2H_5$, $HgCl_2$, in de verhouding van CO_3Na_2 op $HgCl_2$, terwijl op 0,6 gr. $C_3N_3 . 3OC_2H_5$, verondersteld te zullen vrijkomen, waren genomen 150 C.C. water.

a. Een hoeveelheid van 0,7 gr. kwikverbinding van n. cyanuurzuur aethyl gaf (na droogen onder een exsiccator, als de volgenden) berekend op 1 gr. stof (als de volgenden) 0,355 gr. afzetsel.

b. Verbinding van II (zie p. 391 de betreffende analysen) 0,444 gr. afzetsel.

c. Van III (zie p. 391) 0,39 gr. afzetsel.

d. Van een ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding) 0,393 gr. afzetsel.

e. Van het lichaam van CLOËZ (vroeger geanalyseerd *)) 0,379 gr. afzetsel.

Alleen het eerste afzetsel had een bruinroode kleur, dat der anderen was grootendeels meer of min geelachtig gekleurd. Te oordeelen naar de genoegzame overeenstemming der hoeveelheid aan afzetsel, schijnt men hier te doen te hebben met een kwikoxychloride eener zelfde samenstelling maar verschillende kleur †). Over het na staan onder den

*) B. III. 159; B. IV. 431, 432.

†) *Handb. d. Anorg. Chem.* von GMELIN. B. III 792 (1875).

exsiccator terugblijvende der filtraten, kan eerst later mededeeling worden gedaan.

Scheiding door waterdamp. Als vervolg op een vroegere *) mededeeling strekke het volgende. Een hoeveelheid van 1 gr. ruw product en 150 C.C. water werden verhit en ongeveer 100 C.C. vloeistof opgevangen, den bekenden reuk hebbende. Sublimaatoplossing gaf slechts zeer weinig van opaliseeren, daarentegen werd de oplossing neêrgeslagen met sublimaat genoegzaam op de wijze van n. cyanuurzuur aethyl. Ook het terugblijvende werd neêrgeslagen met sublimaat. Lastig bij het destilleeren is het stooten door het zwaardere vloeibare gedeelte door water uit ruw product afgezet, terwijl dit eerste slechts zeer langzaam overgaat; destillatie met stoom zou hier zeker geschikter zijn. Hetzelfde geldt noodwendig van ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding, *meerendeels* altijd wel te verstaan); zonder stoom geeft het stooten aanleiding tot te veel bezwaar. Daarom werd dit laatste in oplossing overgehaald; hierbij bleek, dat een oplossing bij verwarming troebel wordende door uitscheiden van n. cyanuurzuur aethyl, zeer wel kan overgaan, maar neme men de oplossing echter niet te sterk, en zoo, dat bij meerdere verwarming de vloeistof weder helder wordt, anders gaat er weldra over tengevolge van het stooten. Een goede verhouding bleef te zijn 2 gr. ruw product na staan op 175 C.C. water (en wat platinadraad in de retort); van den aanvang af wordt dan ook het destillaat bij verwarming troebel (bij een verdunde oplossing blijft n. cyanuurzuur aethyl ook regelmatig overgaan). Amidoverbinding (door afzetten uit ruw product bij staan, altijd wel te verstaan onder een exsiccator) genomen in de verhouding van 0,6 gr. op 150 C.C. water, destilleerde naar het scheen niet over, want 100 C.C. overgegaan gaven met 16 C.C. der sublimaatoplossing geen neêrslag, ook niet na staan, terwijl het terugblijvende met de sublimaatoplossing dadelijk een neêrslag vormde. Alzoo kan door overhaling

*) B. IV. 438.

met water n. cyanuurzuur aethyl worden gescheiden van amido-verbinding. Het aethylcyanaat schijnt hierbij niet te worden gepolymeriseerd.

Scheiding door verlaging in temperatuur *). N. cyanuurzuur aethyl in waterige oplossing wordt grootendeels afgezet en wel in verbinding met water, welk laatste onder een exsiccator gemakkelijk wordt losgelaten, waarbij de krystallen verweeren. Nu kan genomen worden een waterige oplossing van ruw product of deze aanvankelijk worden overgehaald (bedoeld wordt, ruw product na staan en uitkrystallisatie van amido-verbinding; bij overhaling blijft dit laatste terug). Voor het eerste wordt genomen ongeveer 2 gr. op 100 C.C. water (sommige producten vereischen ter oplossing meer water), terwijl het oplossen wordt bevorderd door verwarming in een waterbad en daarna schudden tot de vloeistof genoegzaam is bekoeld (waarna wordt gefiltreerd). Een oplossing van 0,6 gr. amido-verbinding op 100 C.C. water gaf bij lage temperatuur krystallen, maar niet duidelijk gekrystalliseerd, als van n. cyanuurzuur aethyl, waarvan de verweerde krystallen zeer gemakkelijk zijn te onderscheiden. In eerstgemelde oplossing kan slechts uiterst weinig aan amido-verbinding voorhanden zijn. Het gekrystalliseerde n. cyanuurzuur aethyl bleek dan ook zuiver te zijn. Aanvankelijke overhaling zou iets voor kunnen hebben, maar dan moet 2 gr. stof op 175 C.C. water worden genomen, anders is het bezwaar te groot van stooten (zie vroeger). In het eerste geval werd van 10 gr. product ongeveer 4 gr. n. cyanuurzuur erlangd (zonder krystalwater), door overhaling dan niet meer dan de helft. Wat aangaat het krystalliseeren, zoo is geschikt een temperatuur een weinig boven 0^0; is de temperatuur betrekkelijk zeer laag, dan houde men deze betrekkelijk korten tijd, anders wordt het geheel een ijsmassa. Soms gebeurt het, dat niets is uitgekrystalliseerd, maar door eenige beweging de krystallisatie aanvangt, en zich door de geheele vloeistof voortplant.

---

*) Zie B. III. 150.

Er werd ook eens nagegaan, of gemelde eigenschap van n. cyanuurzuur aethyl zou te gebruiken zijn ter quantitatieve bepaling.

I. 0,631 gr. n. cyanuurzuur aethyl gaf 0,3455 afzetsel bij lage temperatuur (altijd na staan onder een exsiccator).

II. 0,691 gr. van het lichaam van Cloëz, hetzelfde als waarvan zoo straks (pag. 394) sprake was, gaf onder dezelfde omstandigheden 0,2873 gr. afzetsel.

Dus op 100 gew.-d. aan n. cyanuurzuur aethyl:

I. 54,7
II. . . . . 41,5.

Het product dezer bereiding van het lichaam van Cloëz zou alzoo bevatten 75,8 p. c. n. cyanuurzuur aethyl ($54,7 : 41,5 = 100 : x$).

Bij deze bepalingen was 0,6 gr. stof genomen op 100 C.C. water. Deze oplossing bleek wat te zwak te zijn, in zooverre als van een ander product en wel ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding) bij een eenigzins hoogere temperatuur n. cyanuurzuur aethyl (met krystalwater) goed uitkrystalliseerde en niet van gemelde twee oplossingen, die bij een betrekkelijk lage temperatuur geheel waren bevroren, terwijl bij ontdooien het n. cyanuurzuur aethyl (altijd met krystalwater) terugbleef. Deze bepalingen zullen daarom herhaald worden in den volgenden winter. Toch hebben zij reeds eenige beteekenis, in zooverre als broomwater (naar de gewijzigde berekeningswijze) gaf 70 p. c. en de sublimaatmethode 81,3 p. c. aan n. cyanuurzuur aethyl *).

Ruw product en ammoniak †). Een hoeveelheid van 1,12 gr. ruw product (na staan) liet men staan met 11 gr. ammoniak (van 16,6 pCt.) in een gesloten fleschje, waarna de inhoud werd geplaatst onder een exsiccator en vervolgens in vacuo; het gewicht bedroeg thans 1,035 gr. aan *vaste*

*) Zie deze Verhandeling, pag. 391.

†) B. I.

stof, dus was het afgenomen 0,085 gr.. Bij deze proef was aanvankelijk van tijd tot tijd geschud, waarbij de massa weldra was vast geworden. De ontstane massa smolt nog niet bij 210°, en was betrekkelijk gemakkelijk oplosbaar in water. Met broomwater gaf 0,44 gr. stof aan afzetsel 0,197 gr., dus op 0,15 gr. aan afzetsel 0,067 gr., zoodat betrekkelijk weinig van n. cyanuurzuur aethyl of eenig afgeleide, scheen voorhanden te zijn.

Bij 9,7 gr. versch ruw product werd gevoegd 10 gr. ammoniak van dezelfde sterkte, terwijl men dit mengsel liet staan in een toegesmolten buis gedurende vier maanden. Afgezet aan krystallijne stof was 0,41 gr. (alzoo 4,2 p. c.), terwijl de vloeibare massa na staan onder een exsiccator terugliet aan vaste stof 3,02 gr., te samen dus uitmakende 3,43 gr. Daar ruw product ongeveer 40 p. c. alkohol schijnt te bevatten, zijn de 9,7 gr. waarvan werd uitgegaan te herleiden tot ongeveer 5,8 gr., hierna afgetrokken 3,4 gr. blijft een verlies over van 2,4 gr.. De eerste stof (van 0.41 gr.) werd niet neêrgeslagen met broomwater, terwijl hierbij eenige gasontwikkeling schijnt plaats te hebben; het reagens van Nessler gaf een zeer zwak geel gekleurd neêrslag. Voor het gehalte aan stikstof (der niet nader gezuiverde stof) werd verkregen 32,2 p. c.. Ook het andere product (3,02 gr.) gaf met broomwater geen neêrslag (genomen werd 1 gr. op 100 C.C. water). Het schijnt alzoo, dat geen afgeleiden van n. cyanuurzuur in noemenswaardige hoeveelheid aanwezig waren. Het verlies in gewicht zou ten deele kunnen verklaard worden door aanvankelijke substitutie van de rest $O C_2 H_5$ door $N H_2$. Vooralsnog kan het ons doel niet wezen dit onderzoek te vervolgen.

N. cyanuurzuur aethyl en ammoniak. In verband met het voorgaande was het wenschelijk de verhouding dezer stoffen te leeren kennen. Op 2,67 gew.-d. cyanuraat (zuiver) werden genomen 11 gew.-d. ammoniak van voormelde sterkte, welk mengsel werd bewaard in een toegesmolten buis, totdat de krystallijne stof geheel scheen omgezet te zijn in een andere (het geval na ongeveer negen maanden). De krystalmassa met vloeistof werd gedaan op een schaaltje,

de vloeistof weggedaan; na droogen bedroeg de eerste ongeveer 1,9 gr., door eenmalige omkrystallisatie uit warm water gezuiverd. Het smeltpunt bedroeg ongeveer 97°. Een hoeveelheid van 0,2488 gr. stof gaf 64 C.C. stikstof bij 8°,5 en 756,57 Bar. (gecorr.), overeenkomende met 30,8 p. c. stikstof, terwijl het n. monamidocyanuurzuur aethyl ($C_3N_3 . 2OC_2H_5 . NH_2$) van HOFMANN *) vordert 30,5 p. c. (en een overeenkomstig smeltpunt heeft). Dit lichaam krystalliseert in fijne naalden tot een zijdeglanzende massa. Het wordt neêrgeslagen door broomwater (en sublimaat), dus is het wel een afgeleide van n. cyanuurzuur, tot dusverre niet aangetoond (terwijl H. van deze stof geen analysen openbaar maakte). De medegedeelde methode ter bereiding is zeer eenvoudig.

Afzetsel †) *uit ruw product bij staan*, tot nog toe bestempeld door mij met de benaming »amido-verbinding", werd omgekrystalliseerd uit warm water. Na eenmalige omkrystallisatie bedroeg het smeltpunt ongeveer 124°, terwijl de loupe geen mengsel deed kennen, en de krystallen zich voordeden als goed gevormde prisma's. Na nogmalige omkrystallisatie bleek het smeltpunt vergeleken met dat der vorige niet te zijn veranderd, en het uiterlijk voorkomen gaf tevens den indruk, dat dit lichaam afwijkt van n. monamidocyanuurzuur aethyl, tevens het geval na een derde omkrystallisatie.

I. Een hoeveelheid van 0,2545 gr. stof der tweede omkrystallisatie gaf bij 8,5° en 749,57 Bar. (gecorr.) aan stikstof 70,5 C.C.

II. Van een derde omkrystallisatie gaf 0,2369 gr. bij 11,5° en 757,35 Bar. (gecorr.) aan stikstof 65 C.C.

Op 100 gew.-d. overeenkomende met:

	I.	II.	$N_3C_3.2OC_2H_5.NH_2$ eischt:
Stikstof.	32,8	32,5	30,5 .

*) B. II, 168.

†) B. III, 165.

Bij koken der waterige oplossing gaat niets over, evenmin met n. monamidocyanuurzuur aethyl. Niet onwaarschijnlijk is dit lichaam daarmede niet identisch, ook wijl het stollingspunt (ongeveer 117^0) der drie omkrystallisatie-produkten overeenstemt. De hoeveelheid waarin dit lichaam optreedt, is betrekkelijk zeer gering, waardoor een nader onderzoek voorloopig moest gestaakt worden.

N. cyanuurzuur aethyl en aniline. Dit cyanuraat is zeer gemakkelijk oplosbaar in aniline, zoo 0,5 gr. in 0.9 gr. amiline en blijkbaar is de oplosbaarheid nog grooter. Bewaard vele maanden in een toegesmolten buis werd niets afgezet.

Lichaam van Cloëz nader. Een hoeveelheid van 6,497 gr. versch bereid, en na eenige dagen in vacuo te hebben gestaan gedeeltelijk vast geworden, werd korten tijd verhit bij 35—40^0 om het geheel weder vloeibaar te maken, en toen geplaatst onder een exsiccator. Weldra vertoonde zich een aanslag, terwijl deze stof in water bleek oplosbaar te zijn en na verdampen bij gewone temperatuur terugbleef. Na vier maanden bedroeg het gewicht 5,579 gr. en was alzoo 0,918 gr. vervluchtigd. Een bepaling met broomwater leverde niets bijzonders op. Deze proef werd tot nog toe niet herhaald.

Normaal cyanuurzuur aethyl en ruw product tegenover chloorwaterstof. Van ruw product (na staan) werd genomen 1,89 gr. en hierdoor bij gewone temperatuur chloorwaterstof gevoerd, waarbij de massa dikvloeibaar werd (het eerst door Gal *) aangetoond voor het lichaam van Cloëz). Verwarmd daarna bij 35^0—40^0 had een soort *ontploffing* plaats onder vorming eener vaste stof (oplosbaar in warm water) blijkbaar *isocyanuurzuur.* Bij een volgende proef werd uitgegaan van 2,542 gr. door chloorwaterstof geworden 3,4054 gr., dus toegenomen 0,912 gr.; verwarmd tot 33^0 had een hevige gasontwikkeling plaats van C_2H_5Cl, nu en dan tot eenige rust komende maar bij stijging tot 90^0 telkens met kleine

---

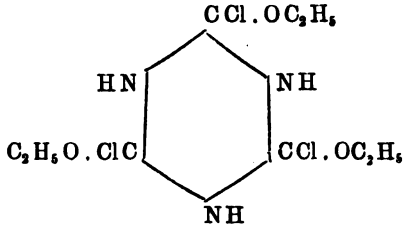
*) *Compt. rend.* 61. 530.

ontploffingen, terwijl een vaste massa terugbleef, geheel oplosbaar in water (dus vrij van cyamelid).

Een hoeveelheid van 0,349 gr. normaal cyanuurzuur aethyl werd door ehloorwaterstof ten deele vloeibaar en nam daarbij 0,096 gr. toe in gewicht. Bij verwarming was de massa gesmolten nabij 27°; bij ongeveer 29° ving een gasontwikkeling aan, bij stijgen tot ongeveer 60° nu en dan bij wijze van kleine ontploffingen.

Een geschikte methode ter bereiding van het additie-product bestaat daarin, om n. cyanuurzuur aethyl op te lossen in aether (watervrij) en hierdoor chloorwaterstof te leiden; weldra zetten zich dan naaldjes af.

Normaal cyanuurzuur aethyl *zou* kunnen addeeren 3 H Cl en vormen:



(of de H bij de C en Cl bij N); geeft bij verwarming isocyanuurzuur en C_2H_5Cl, een merkwaardig geval eener inwendige moleculaire ontleding.

Bereiding van ruw product, ruw product na staan, en lichaam van Cloëz. Bij 58 gr. alkohol (gemaakt door ontleding van C_2H_5ONa, xC_2H_6O) vermengd met 116 gr. aether (gezuiverd met natrium) wordt langzamerhand gedaan 3,8 gr. natrium (onder afkoeling met water); en na oplossen ongeveer 19 gew.-d. broomcyaan opgelost in 70 - 75 gew.-d. aether (steeds gezuiverd) uit een chamaeleon-burette (onder afkoeling met water) bij gedeelten toegevoegd. Na filtratie (onder een klok) wordt overgehaald in een retort, daarna de terugblijvende vloeistof in een kleine buis met afleidingsbuis langen tijd verhit in een bad van kokend water, ter verwijdering zooveel mogelijk van aether en alkohol, totdat genoegzaam niets meer overgaat, waarna nog onge-

veer een half uur wordt verhit; terug blijft dan zoogenaamd ruw product.

Het lichaam van CLOËZ werd gemaakt door bij gemeld product van drie bereidingen (dus met $3,8 \times 3 = 11,4$ gr. natrium) eerst te voegen 86 C.C. water, en de neêrgeslagen olieachtige vloeistof tweemaal te wasschen, telkenmale met 43 C.C. water. Het product wordt dan geplaatst in vacuo met zwavelzuur (beter dan onder een exsiccator). Bij lang staan zet het lichaam van CLOËZ een kleine hoeveelheid amido-verbinding af.

Laat men ruw product staan onder een exsiccator met zwavelzuur, dan gaat de alkohol langzamerhand weg, en krystalliseert amido-verbinding uit; het vloeibare gedeelte kan hiervan gemakkelijk worden afgeschonken. Dit product nadert in samenstelling zeer tot het lichaam van CLOËZ; beiden zijn te beschouwen als grootendeels te bestaan uit: $N_3C_3 . 3OC_2H_5, \alpha NCOC_2H_5$.

Thiocarbaminezuur aethyl en normaal aethylcyanaat. Ter bereiding *) van thiocarbaminezuur aethyl werd 1 gew.-d. natrium opgelost (onder afkoeling) in 15 gew.-d. gewonen abs. alkohol, daarna toegevoegd 3,3 gew.-d. zwavelkoolstof (onder afkoeling), vervolgens 6,8 gew.-d. aethyliodide, om dan eenige uren zachtkens te verhitten op een waterbad. Na vele uren te hebben gestaan werd de massa gefiltreerd, het filtraat neêrgeslagen met water, gescheiden; de zware vloeistof verhit tot ongeveer 130°, na bekoeling opgelost in 13 gew.-d. abs. alkohol, ammoniakgas doorgeleid, na een dag staans werd de alkohol gedeeltelijk afgedestilleerd, verder ingedampt gedeeltelijk op een waterbad, vervolgens geplaatst onder een exsiccator, waarna krystallen werden afgezet. De krystalmassa werd gedaan tusschen filtreerpapier. Het smeltpunt was gelegen nabij 38°.

Bij gemelde bereiding hebben de volgende reacties plaats. Natriumaethylaat: C_2H_5ONa wordt met CS_2 omgezet in:

---

*) *J. pr. Ch. N. F.* Bd. 6, 445; Bd. 8, 115.

†) *Ann. Ch. Ph.* Bd. 72, 12; Bd. 75, 128.

$KS.CS.OC_2H_5$, dit met C_2H_5I in: $C_2H_5S.CS.OC_2H_5$, met NH_3 overgaande in: $NH_2.CS.OC_2H_5$ thiocarbaminezuur aethyl.

Door middel van kwikoxyde of broomwater zou daaraan H_2S wellicht onttrokken kunnen worden en alzoo ontstaan: $NC.OC_2H_5$ normaal aethylcyanaat. In geval dit mocht gelukken, had men daarin een zeer geschikte contrôle.

Ongeveer een gram thiocarbaminezuur aethyl werd, na oplossing in water, behandeld met ongeveer de dubbele hoeveelheid versch neêrgeslagen mercurioxyde, waarbij ontstond zwavelkwik, en een lichaam met *sterken reuk*. Het geheel werd een halven dag aan zich zelf overgelaten, en nu en dan geschud. Bij verdampen van een deel van het filtraat bleef iets over van een kleurloos lichaam, dat met zwavelwaterstof zwart werd en bleek kwik te bevatten. Dit laatste is ontgaan aan de aandacht van Debus *). Gemelde stof gaf met het reagens van Nessler de reactie als die met ammoniak. Naar Debus ontstaat een kleine hoeveelheid van eenig niet nader te determineeren ammonium-zout, dat wel niet het geval schijnt te zijn. Ten einde deze stof af te zonderen, werd door gemeld filtraat zwavelwaterstof in overmaat doorgeleid, gefiltreerd, het filtraat bij zachte warmte ingedampt, waarbij niets terugbleef van een krystallijne, maar slechts een kleine hoeveelheid van een op 't oog amorphe zelfstandigheid.

Het lichaam met sterken reuk zou $OCNC_2H_5$ kunnen wezen, ontstaan door omzetting van aanvankelijk gevormd $NCOC_2H_5$, maar $OCNC_2H_5$ zou met water geven diaethylureum, waarvan niets bleek te zijn ontstaan. Mogelijkerwijze zou broomwater geschikter zijn (een methode ter ontzwaveling die wij vroeger leerden kennen), en inderdaad wordt een oplossing van thiocarbaminezuur aethyl gemakkelijk ontleed met broom onder vorming van zwavelzuur. Van de vorming van $NC.OC_2H_5$ of $N_3C_3.3OC_2H_5$ werd echter bij nader onderzoek niets waargenomen.

---

*) l. c. Bd. 72, 12.

Debus *) meent met salpeterigzuur of cuprichloride door thiocarbaminezuur aethyl een lichaam te hebben verkregen: $C_6H_{10}N_2SO_2$. Wellicht is de formule $C_6H_{12}N_2SO_2$ en de structuur:

$$\begin{array}{l} HN = C - OC_2H_5 \\ \quad\;\; S< \\ HN = C - OC_2H_5, \end{array}$$

en vormt dit lichaam een overgangsproduct bij oxydeeren, waardoor het ontstaan van $NCOC_2H_5$ wordt bemoeilijkt.

Een contrôle eenigzins voor het bovenstaande had men in de verhouding van H_2S tegenover $NCOC_2H_5$, aangenomen dat dit kan bestaan en een deel uitmaakt van ruw product (en dit na staan). Als eerste proef werd zwavelwaterstof geleid bij gewone temperatuur door ruw product na staan, waarbij geen noemenswaardige vermeerdering in gewicht plaats had; toch werd de massa een weinig geel gekleurd en ontstond er een product met eigenaardigen reuk. Zwavelwaterstof geleid onder verwarming (tot en bij 100°) door ruw product na staan deed eveneens de massa geel worden en een stof ontstaan met sterken reuk, maar van het ontstaan eener krystallijne zelfstandigheid werd niets waargenomen. De volgende proeven werden daarenboven genomen.

Door ruw product na staan opgelost in aether, werd zwavelwaterstof geleid, tevens na toevoeging van een weinig ammoniak. Bij ruw product na staan opgelost in alkohol werd eenig geel zwavelammonium gedaan, en de laatste proef genomen zonder alkohol.

Na inwerking liet men het geheel staan onder een exsiccator. Het na staan terugblijvende behandeld met water gaf met SO_4Cu en zoutzuur *niet* de reactie †) op $NH_2.CS.OC_2H_5$, van welke verbinding overigens niets werd waargenomen.

Uit het medegedeelde volgt noodwendig niet, dat wellicht

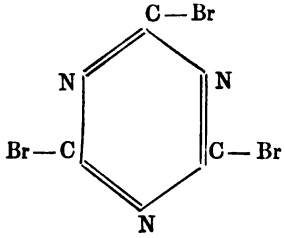
---

*) *Ann. Ch. Ph.* 82, 279; Beilstein, l. c. 741.

†) *Ann. Ch. Ph.* 82, 262; Beilstein l. c. 741.

onder andere omstandigheden zoowel additie kan intreden van H_2S met $NC.OC_2H_5$ ter vorming van $NH_2.CS.OC_2H_5$, als aan dit laatste H_2S zal kunnen ontrokken worden.

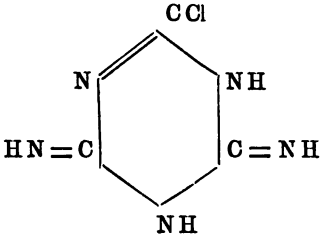
Over normaalcyanuurzuur-bromide en chloride, benevens chloorcyanamid. Het s. g. in gasvorm van vast chloorcyaan *) komt overeen met de formule: $(CN)_3Cl_3$, en het is wel aan geen twijfel onderhevig, of dit is tevens het geval met vast broomcyaan, waarvan dan de formule is: $(CN)_3Br_3$. Dit laatste geeft naar PONOMAREFF †) met natriumaethylaat n. cyanuurzuur aethyl, waaruit zou volgen, dat de structuurformule van vast broomcyaan is terug te geven met den vorm:



Ook afgescheiden van gemelde reactie is aan dit lichaam wel bezwaarlijk een andere structuur toe te kennen.

Laat men op vast chloorcyaan inwerken ammoniak, dan ontstaat, naar GERHARDT en andere scheikundigen, een verbinding, dus genaamd *chloorcyanamid*, volgens NENCKI §) aldus geconstrueërd:

(A)



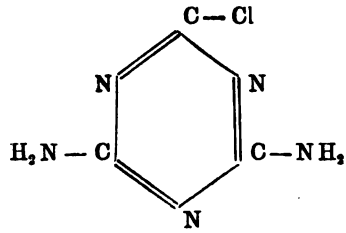
*) BEILSTEIN l. c. 688.

†) *Berl. Ber.* XV, 513.

§) BEILSTEIN, l. c. 717.

In ieder geval moet aanvankelijk gevormd worden een lichaam van de structuur:

(B)



De vraag of zoogenaamd chloorcyanamid tot formule heeft A of B, staat in verband met het vraagstuk betreffende de structuur van zoogenaamd cyanamid. Bij inwerking van NH_3 op $N \equiv C - Br$, zou in de eerste plaats moeten ontstaan: $N \equiv C - NH_2$, dat echter door verschuiving schijnt over te gaan in: $HN = C = NH$. In zooverre heeft de opvatting van Nencki dan meer waarschijnlijkheid *) voor zich, maar dit neemt niet weg, dat ook hier het experiment, voor zooverre mogelijk, moet beslissen. De verhouding nu tegenover broom zal wellicht in staat zijn deze zaak tot genoegzame helderheid te brengen. In gemeld geval heeft men ook te doen met een gesloten keten, en daarin heeft een verschuiving minder gemakkelijk plaats, zoodat chloorcyanamid wel degelijk B tot structuur zou kunnen hebben (in dat geval kan de benaming zijn: diamidonormaal cyanuurzuurchloride).

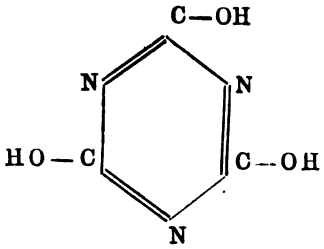
Over de theoretisch bestaanbare cyanuurzuren. Behalve normaal cyanuurzuur en isocyanuurzuur zouden nog andere cyanuurzuren †) bekend zijn. van wier structuur men echter niets weet. Het kan daarom zijn goede zijde hebben eens na te gaan, hoeveel cyanuurzuren naar de theorie kunnen bestaan. Noemt men die lichamen cyanuurzuren, welke tot mol. formule hebben $C_3H_3N_3O_3$ en waarin C en N elkander in een

*) B. I, 14.

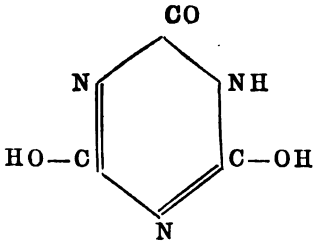
†) Beilstein, l. c. S. 693.

gesloten keten afwisselen, dan zijn behalve de twee bekenden (A en D) daarenboven nog twee anderen (B en C) naar de theorie mogelijk:

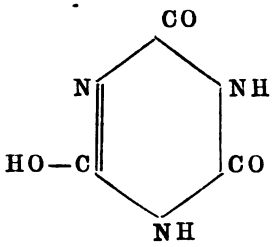
A.



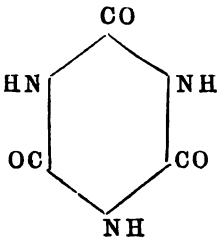
B.



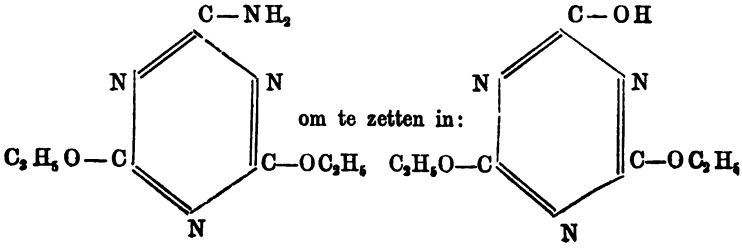
C.



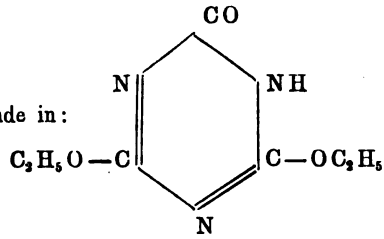
D.



De verbinding A zou in vrijen staat niet kunnen bestaan; van B en C is voorloopig niets te zeggen dienaangaande, alleen zullen zij zonder twijfel meer standvastigheid bezitten, het meest het geval met D. Later hopen wij afgeleiden van A om te zetten in die van B en C, b. v. uitgaande van monamido- en diamido n. cyanuurzuur aethyl. Nemen me tot voorbeeld het maken van een afgeleide van B:[1]



overgaande in:



Besluit. Het medegedeelde schijnt te leiden tot de volgende uitkomsten:

1. Ruw product (bereid naar de gemelde methode *)), en door staan onder een exsiccator bevrijd van alkohol en amido-verbinding, nadert in samenstelling tot het lichaam van Cloëz, dat evenmin een zuivere scheikundige verbinding is. Bij staan wordt het vloeibaar gedeelte (na afschenken) schijnbaar geheel vast door afzetten van n. cyanuurzuur aethyl, als het lichaam van Cloëz, en na scheiding van vast en vloeibaar gedeelte (in samenstelling naderende tot het eerste) wordt dit bij staan weder schijnbaar geheel vast †). Bij staan schijnt het gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl van ruw product, en dit na staan, toe te nemen §).

2. Het gehalte van ruw product, lichaam van Cloëz enz. aan n. cyanuurzuur aethyl is wellicht hooger dan naar de vroeger gevolgde berekening het geval zou wezen; bepalingen met sublimaat **) geven een gehalte, dat nog hooger is.

3. Thiocarbaminezuur aethyl: $NH_2 . CS . OC_2H_5$ schijnt noch met mercurioxyde noch broomwater te vormen: $NCOC_2H_5$ of $3NC . 3OC_2H_5$. Omgekeerd werd met H_2S geen additieproduct erlangd uitgaande van ruw product, overeenkomende met thiocarbaminezuur aethyl ††).

---

*) Zie deze Verhandeling pag. 401.

†) l. c. pag. 375.

§) l. c. pag. 376.

**) l. c. pag. 389, 390.

††) l. c. pag. 404.

4. Bij verzeepen van ruw product en dit na staan, met een alkoholische oplossing van potassa *), werd geen kaliumcyanaat verkregen. Hierbij ontstaat een lichaam met een reuk herinnerende aan dien van een carbylamine; tevens het geval bij verzeepen met een waterige oplossing van potassa en soda †), zelfs bij gewone temperatuur; niet het geval met n. cyanuurzuur aethyl (alhoewel oplosbaar in sodaloog na lang staan bij gewone temperatuur, zonder met alkohol een geleiachtig neêrslag te geven als isocyanuurzuur).

5. N. cyanuurzuur aethyl kan zeer geschikt worden gemaakt, door ruw product te laten staan onder een exsiccator (amido-verbinding te doen uitkrystalliseeren), het terugblijvende op te lossen in water, en deze oplossing te plaatsen bij een temperatuur van even boven 0^0, onder welke omstandigheden het zich afzet §) (met krystalwater).

6. Het monamidocyanuurzuur aethyl van HOFMANN is gemakkelijk zuiver te erlangen door ammonia te laten inwerken bij gewone temperatuur op n. cyanuurzuur aethyl. Door de verhouding tegenover broomwater (en sublimaat) staat de formule $3NC.2OC_2H_5.NH_2$ genoegzaam vast, en is het derhalve te beschouwen als een afgeleide van n. cyanuurzuur **). De amido-verbinding afgezet uit ruw product schijnt hiermede niet identisch te zijn ††).

7. Als structuurformule voor vast broomcyaan §§) is te nemen $3N.3CBr$ en voor die van vast chloorcyaan $3N.3CCl$.

8. Theoretisch kunnen bestaan vier cyanuurzuren ***).

Onderzoekingen met betrekking tot normaal cyaanzuur en afgeleiden worden voortgezet.

Utrecht, 29 Maart 1884.

---

*) l. c. pag. 385.
†) l. c. pag. 380, 384.
§) l. c. pag. 396.
**) l. c. pag. 399.
††) l. c. pag. 399.
§§) l. c. pag. 407.
***) l. c. pag. 405.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING VAN Dr. F. DE BOER.

GETITELD:

DISCUSSIE DER ALGEMEENE VIERDE-MACHTS-VERGELIJKING.

(Uitgebracht in de Vergadering van 25 April 1884.)

In eene vorige verhandeling, getiteld: »*Uitbreiding van het theorema van* ROLLE" opgenomen in de *Versl. en Meded.* 2de Reeks, Deel XIX, p. 384, werd door Dr. DE BOER bewezen dat, indien men in een veld waar de wortels eener hoogere machtsvergelijking en harer afgeleide op de bekende wijze zijn afgebeeld, alle begrensde φ-lijnen aanbrengt welke twee der wortels verbinden, deze φ-lijnen een samenhangend geheel vormen 't welk alle wortels der oorspronkelijke en afgeleide vergelijking opneemt en nergens een gesloten kring doet ontstaan. In het algemeen bevat daarbij iedere φ-lijn twee wortels der oorspronkelijke en daartusschen één wortel der afgeleide vergelijking; maar in bijzondere gevallen komen φ-lijnen voor welke n wortels der oorspronkelijke en $n-1$ der afgeleide bevatten ($n > 2$). Onder deze vindt men er die zich vertakken ter plaatse waar een wortel der afgeleide vergelijking gelegen is.

Wat de vierdemachtsvergelijking betreft, bestaan er twee verbindingswijzen der wortels door begrensde φ-lijnen, die op gelijke algemeenheid aanspraak kunnen maken. Bij de eene zijn de wortels in eene bepaalde volgorde twee aan

twee, bij de andere is één wortel met de drie overige verbonden. Daarnevens kunnen echter 25 verschillende verbindingswijzen van mindere algemeenheid optreden.

In de thans ingezonden verhandeling nu, heeft Dr. DE BOER zich ten doel gesteld na te gaan, wanneer, en op welke wijze deze verschillende verbindingswijzen in elkander overgaan als men in eene gegevene vierdemachtsvergelijking den bekenden term geleidelijk veranderen laat.

Dewijl de afgeleide vergelijking daarbij onveranderd blijft, behouden hare wortels hunne plaats, maar die van de vergelijking zelve bewegen zich over het veld zoodanig dat de plaats van één van hen die der overigen bepaalt. Daarbij veranderen ook de verbindende φ-lijnen voortdurend van vorm en stand.

De schrijver toont nu aan dat de overgangen tusschen de verbindingswijzen van grootere algemeenheid steeds gevormd worden door die gevallen waarbij vertakte φ-lijnen optreden. Zulke vertakte φ-lijnen verbinden steeds twee of drie wortels der afgeleide vergelijking; brengt men dus alle lijnen aan, welke door eene behoorlijke keuze van den bekenden term φ-lijnen worden kunnen, en welke tevens twee of meer wortels der afgeleide vergelijking verbinden, dan kan overgang van de eene tot de andere verbindingswijze uitsluitend dan plaats hebben als een der wortels zulk eene lijn overschrijdt.

Deze lijnen, door Dr. DE BOER *verdeelde lijnen* genoemd, verbinden op dat oogenblik minstens drie der wortels, terwijl door den vierden wortel een met de overige takken niet samenhangende tak derzelfde φ-lijn gaat. Brengt men ook *dien* tak aan, dan kan geen der wortels eene verdeelende lijn overschrijden, zonder dat dit ook de overige wortels doen. Te zamen deelen deze lijnen het veld af in vakken, zoodat, indien men een der wortels in één dier vakken brengt, dadelijk aangewezen worden kan in welke vakken zich de overigen bevinden *en tevens op welke wijze zij door φ-lijnen verbonden zijn.*

In de eerste plaats onderzocht de schrijver het bijzondere geval dat ééne enkele verdeelende lijn de drie wortels der

afgeleide vergelijking bevat. Merkwaardig genoeg blijkt het dat dit onder twee geheel verschillende omstandigheden geschiedt. Vooreerst namelijk dan wanneer de wortels der afgeleide vergelijking alle drie in ééne rechte gelegen zijn, maar tevens ook dan wanneer zij de hoekpunten vormen van een driehoek die de eigenschap bezit dat de som der vierkanten zijner zijden gelijk is aan zesmaal den straal van den omgeschreven cirkel.

Daarna behandelt de schrijver het meer algemeene geval, dat er drie verschillende verdeelende lijnen zijn. Men behoort dan twee gevallen te onderscheiden al naar gelang de som der vierkanten der zijden van den driehoek, waarvan de wortels der afgeleide vergelijking de hoekpunten zijn, grooter is of kleiner dan het vierkant van den straal van den omgeschreven cirkel. In het eene geval wordt het veld door de verdeelende lijnen in 28, in het andere in 16 vakken afgedeeld.

Hierop wordt nog het geval onderzocht dat twee wortels der afgeleide vergelijking samenvallen.

Telkens wordt de loop der verdeelende lijnen nagegaan en door eene figuur verduidelijkt; de correspondeerende vakken worden aangewezen en de verbindingswijzen der wortels door φ-lijnen beschreven.

Ten slotte wordt een en ander nog nader met behulp van het RIEMANN'sche vlak toegelicht.

Hoewel de schrijver in deze verhandeling de theorie der hoogeremachtsvergelijkingen niet met nieuwe stellingen van eenvoudigen inhoud verrijkt, is toch het tamelijk ingewikkeld onderwerp met zooveel helderheid en meesterschap behandeld en draagt die behandeling zoozeer bij tot nadere toelichting der vroegere door hem verkregen uitkomsten en tot verduidelijking der voorstellingen omtrent den samenhang tusschen de ligging van de wortels der oorspronkelijke en afgeleide vergelijking in het vlak waarin zij gewoonlijk worden afgebeeld, dat wij niet aarzelen de verhandeling ter opneming in de werken der Akademie aan te bevelen.

D. J. KORTEWEG.
C. H. C. GRINWIS.

DISCUSSIE

DER

ALGEMEENE VIERDE-MACHTSVERGELIJKING.

DOOR

Dr. F. DE BOER.

1. Door schrijver dezes werden in eene verhandeling, getiteld: *Uitbreiding van het theorema van* ROLLE, opgenomen in de *Verslagen en Mededeelingen van de Kon. Akad. van Wetenschappen*, 2de Reeks, Deel XIX, pag. 384, eenige eigenschappen ontwikkeld van de wortels eener hoogere-machtsvergelijking, in verband met die harer afgeleide. Het volgende bevat eene nadere beschouwing van de algemeene vierde-machtsvergelijking in verband met die eigenschappen.

Zij

$$f(z) = f(x + iy) = R e^{i\Phi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

eene vierde-machtsvergelijking. Stellen wij ons voor, dat de waarden van z in een plat vlak zijn afgebeeld, door x en y als de rechthoekige coördinaten van een veranderlijk punt te beschouwen, dan kunnen wij door eene eenvoudige substitutie de vergelijking zoo herleiden, dat het gemeenschappelijk zwaartepunt van de wortels der vergelijking en die harer afgeleide

$$f'(z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

tot oorsprong wordt aangenomen, en de negatieve richting

der x-as door een van de wortels der afgeleide vergelijking gaat *). De vergelijking heeft dan den vorm

$$z^4 + A z^2 + B z = C, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

waarbij nog de reeele en imaginaire deelen van A en B aan zekere voorwaarde moeten voldoen.

Dit omtrent het coördinatenstelsel vastgesteld hebbende, kunnen wij de wortels der afgeleide vergelijking voorstellen door

$$k = -{}^2/_3 p, \quad l = {}^1/_3 p + {}^1/_2 a e^{i\omega}, \quad m = {}^1/_3 p - {}^1/_2 a e^{i\omega}.$$

De punten K, L en M in fig. 1 (en ook in de volgende figuren) stellen die wortels voor. De meetkundige beteekenis der drie grootheden p, a en ω is de volgende: a is de lijn LM, p is de lijn die K met het midden van LM verbindt, en ω de hoek tusschen die twee lijnen, gerekend, zooals in de figuur is aangewezen. Wij voegen hier nog bij, dat b de lijn KM en c de lijn KL zal voorstellen, dat p_1 en p_2 de beide andere medianen van den driehoek KLM zullen zijn, en ω_1 en ω_2 de hoeken analoog met ω, en eindelijk dat ν_1 en ν_2 de hoeken zullen voorstellen, die b en c en μ_1 en μ_2 die welke p_1 en p_2 met de x-as maken. De richting, waarin deze hoeken gerekend worden, is in fig. 1 aangewezen.

2. De afgeleide vergelijking kan nu in de volgende vormen worden gebracht:

$$z^3 - z(l^2 + lm + m^2) - klm = z^3 - z(k^2 - lm) - klm = 0 \ldots (4)$$

of

$$z^3 - z({}^1/_3 p^2 + {}^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) + {}^2/_3 p({}^1/_9 p^2 - {}^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) = 0,$$

terwijl de vierde-machtsvergelijking zelve wordt:

$$z^4 - 2z^2(l^2 + lm + m^2) - 4klmz = \gamma + i\delta \ldots (5)$$

---

*) Zie t. a. p. N°. 10.

of

$$z^4 - 2z^2(^1/_3 p^2 + ^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) + ^8/_3 zp(^1/_9 p^2 - ^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) = \gamma + i\delta,$$

waarin $C = \gamma + i\delta$ gesteld is *).

Stellen wij nog:

$$z^4 - 2z^2(l^2 + lm + m^2) - 4zklm = X + iY,$$

en geven wij aan X en Y de indices 1, 2 of 3 als z door k, l of m vervangen wordt, dan vinden wij

$$X_1 + iY_1 = -k^2(l^2 + 4lm + m^2),\quad X_2 + iY_2 = -l^2(k^2 + 4km + m^2),$$
$$X_3 + iY_3 = -m^2(l^2 + 4kl + k^2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

en verder

$$X_3 - X_2 + i(Y_3 - Y_2) = k(m-l)^3,\quad X_1 - X_3 + i(Y_1 - Y_3) = l(k-m)^3,$$
$$X_2 - X_1 + i(Y_2 - Y_1) = m(l-k)^3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Door invoering van de waarden van k, l en m vindt men hieruit

$$\left.\begin{aligned} X_3 - X_2 + i(Y_3 - Y_2) &= {}^2/_3 p a^3 e^{3i\omega}, \\ X_1 - X_3 + i(Y_1 - Y_3) &= -(^1/_3 p + {}^1/_2 a e^{i\omega})(p - {}^1/_2 a e^{i\omega})^3, \\ X_2 - X_1 + i(Y_2 - Y_1) &= (^1/_3 p - {}^1/_2 a e^{i\omega})(p + {}^1/_2 a e^{i\omega})^3. \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Merkt men nog op, dat $m - k = b e^{i\nu_1}$, $l = -{}^2/_3 p_1 e^{i\mu_1}$ en evenzoo $l - k = c e^{i\nu_2}$, $m = -{}^2/_3 p_2 e^{i\mu_2}$, terwijl $\nu_1 = \omega_1 + \mu_1$, $\nu_2 = \omega_2 + \mu_2 - 180^0$ is, dan vindt men nog

$$\left.\begin{aligned} X_1 - X_3 + i(Y_1 - Y_3) &= {}^2/_3 p_1 b^3 e^{i(3\nu_1 + \mu_1)} = {}^2/_3 p_1 b^3 e^{i(3\omega_1 + 4\mu_1)} \\ X_2 - X_1 + i(Y_2 - Y_1) &= -{}^2/_3 p_2 c^3 e^{i(3\nu_2 + \mu_2)} = {}^2/_3 p_2 c^3 e^{i(3\omega_2 + 4\mu_2)} \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

zoodat men heeft

---

*) Stelt men $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$, en vergelijkt men de coëfficiënten van (3) met die van (5), dan vindt men door eliminatie van p, a en ω

$$4A_2^2(A_1 B_2 - B_1 A_2) + B_2^3 = 0.$$

Dit is de voorwaarde waarvan in N°. 1 sprake was

$$\left.\begin{array}{l} X_3 - X_2 = {}^2/_3\, p\, a^3 \cos 3\omega, \quad Y_3 - Y_2 = {}^2/_3\, p\, a^3 \sin 3\omega \\ X_1 - X_3 = {}^2/_3\, p_1\, b^3 \cos(3\omega_1 + 4\mu_1), \\ \qquad\qquad Y_1 - Y_3 = {}^2/_3\, p_1\, b^3 \sin(3\omega_1 + 4\mu_1), \\ X_2 - X_1 = {}^2/_3\, p_2\, c^3 \cos(3\omega_2 + 4\mu_2), \\ \qquad\qquad Y_2 - Y_1 = {}^2/_3\, p_2\, c^3 \sin(3\omega_2 + 4\mu_2). \end{array}\right\}, \ldots (10)$$

3. Uit

$$X_1 + i\, Y_1 = -k^2 (l^2 + 4\, l\, m + m^2)$$

volgt nog

$$X_1 + i\, Y_1 = -{}^4/_9\, p^2 ({}^2/_3\, p^2 - {}^1/_2\, a^2 e^{2i\omega}),$$

en dus

$$X_1 = -{}^8/_{27}\, p^4 + {}^2/_9\, a^2 p^2 \cos 2\omega, \quad Y_1 = {}^2/_9\, a^2 p^2 \sin 2\omega, \ldots (11)$$

en uit de andere vergelijkingen (6) heeft men op dezelfde wijze:

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = {}^1/_{27} p^4 - {}^5/_{18} p^2 a^2 \cos 2\omega - {}^1/_3\, p\, a^3 \cos 3\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \cos 4\omega \\ Y_2 = \qquad\quad - {}^5/_{18} p^2 a^2 \sin 2\omega - {}^1/_3\, p\, a^3 \sin 3\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \sin 4\omega \\ X_3 = {}^1/_{27} p^4 - {}^5/_{18} p^2 a^2 \cos 2\omega + {}^1/_3\, p\, a^3 \cos 3\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \cos 4\omega \\ Y_3 = \qquad\quad - {}^5/_{18} p^2 a^2 \sin 2\omega + {}^1/_3\, p\, a^3 \sin 3\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \sin 4\omega \end{array}\right\} \ldots (12)$$

De substitie dezer waarden geeft

$$X_3\, Y_2 - Y_3\, X_2 = -{}^1/_9\, a\, p \sin\omega \, \{{}^2/_3\, p^4 a^2 (1 - {}^4/_3 \sin^2\omega) - \\ - {}^5/_3\, p^2 a^4 + {}^3/_8\, a^6\}, \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$X_1\, Y_3 - Y_1\, X_3 = -{}^1/_9\, a\, p \sin\omega \, \{{}^4/_3\, p^5 a \cos\omega + \\ + {}^8/_3\, p^4 a^2 (1 - {}^4/_3 \sin^2\omega) + {}^2/_3\, a^3 p^3 (\cos^3\omega - \sin^2\omega \cos\omega) - \\ - {}^2/_3\, a^4 p^2 - {}^1/_4\, a^5 p \cos\omega\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$X_2\, Y_1 - Y_2\, X_1 = -{}^1/_9\, a\, p \sin\omega \, \{-{}^4/_3\, p^5 a \cos\omega + \\ + {}^8/_3\, p^4 a^2 (1 - {}^4/_3 \sin^2\omega) - {}^2/_3\, a^3 p^3 (\cos^3\omega - \sin^2\omega \cos\omega) - \\ - {}^2/_3\, a^4 p^2 + {}^1/_4\, a^5 p \cos\omega\}. \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

De optelling der laatste drie vergelijkingen geeft

$$X_3 Y_2 - Y_3 X_2 + X_1 Y_3 - Y_1 X_3 + X_2 Y_1 - Y_2 X_1 =$$
$$= ap \sin\omega \{{}^2/_3 p^4 a^2 ({}^4/_3 \sin^3\omega - 1) + {}^1/_3 a^4 p^2 - {}^1/_{24} a^6\} \ldots (16)$$

De grootheid tusschen accolades geplaatst zullen wij door ${}^1/_2 P$ voorstellen, zoodat:

$$P = a^2 \{{}^4/_3 p^2 ({}^4/_3 \sin^2\omega - 1) + {}^2/_3 a^2 p^2 - {}^1/_{12} a^4\} \ldots (17)$$

Deze grootheid P, die in het volgende een hoofdrol te vervullen heeft, kunnen wij nog onder een paar andere vormen voorstellen. Uit de figuur (1) volgt:

$$p^2 = {}^1/_2 b^2 + {}^1/_2 c^2 - {}^1/_4 a^2, \quad ap \cos\omega = {}^1/_2 c^2 - {}^1/_2 b^2;$$

en door subsitutie hiervan in P heeft men:

$$P = {}^2/_9 (a^2 b^4 + a^4 b^2 + a^2 c^4 + a^4 c^2 + b^2 c^4 + b^4 c^2 - a^6 - b^6 - c^6) \ldots (18)$$

Voert men nog in de hoeken K, L en M van driehoek KLM en R den straal des omgeschreven cirkels van dien driehoek, dan vindt men:

$$P = {}^4/_9 abc (a^3 \cos K + b^3 \cos L + c^3 \cos M) \ldots (19)$$

en

$$P = {}^{32}/_9 I^2 (a^2 + b^2 + c^2 - 6 R^2), \ldots (20)$$

waarin I den inhoud des driehoeks KLM voorstelt. Neemt men nog in aanmerking, dat $I = {}^1/_2 ap \sin\omega$ is, dan ziet men, dat (16) nu ook als volgt kan geschreven worden:

$$X_3 Y_2 - Y_3 X_2 + X_1 Y_3 - Y_3 X_1 + X_2 Y_1 - Y_2 X_1 = I.P \ldots (21)$$

De vergelijkingen (13), (14) en (15) kunnen nu nog gebracht worden in de vormen:

$$\left.\begin{aligned}
X_3 Y_2 - Y_3 X_2 &= {}^1/_9 I \{P + {}^4/_3 a^4 (b^2 + c^2 - a^2)\} = \\
&= {}^1/_9 I (P + {}^8/_3 a^4 bc \cos K), \\
X_1 Y_3 - Y_1 X_3 &= {}^1/_9 I \{P + {}^4/_3 b^4 (a^2 + b^2 - c^2)\} = \\
&= {}^1/_9 I (P + {}^8/_3 ab^4 c \cos L), \\
X_2 Y_1 - Y_2 X_1 &= {}^1/_9 I \{P + {}^4/_3 c^4 (a^2 + b^2 - c^2)\} = \\
&= {}^1/_9 I (P + {}^8/_3 abc^4 \cos M)
\end{aligned}\right\} \ldots (22)$$

4. In de boven aangehaalde verhandeling is aangetoond, dat sommige paren van wortels eener hoogere machtsvergelijking door eindige Φ-lijnen *) zijn verbonden, andere niet. Bij het onderzoek, tusschen welke wortels die verbinding bestaat, is het van belang het volgende op te merken.

Alle vergelijkingen, die alleen in den bekenden term verschillen, hebben dezelfde afgeleide; verandert dus de bekende term, dan ondergaat de ligging van de wortels der vergelijking zelve eene verandering, maar die van de wortels der afgeleide niet. Heeft die verandering geleidelijk plaats, dan zal daarbij de volgorde, waarin de verbinding der wortels door Φ-lijnen plaats heeft, *in het algemeen* niet veranderen. Zulk eene verandering *kan* echter plaats grijpen wanneer voor een oogenblik twee of meer Φ-lijnen samenvallen, zoodanig, dat op zulk een oogenblik drie of meer wortels van de vergelijking op *samenhangende* takken eener zelfde Φ-lijn gelegen zijn. Fig. 2 moge dit ophelderen; A, B en G stellen daar drie wortels eener vergelijking voor en K en L twee wortels van hare afgeleide. A en B zijn verbonden door eene Φ-lijn, welke door L gaat, en B en G door eene andere, die over K loopt. Verplaatsen zich nu A, B en G respectievelijk naar A', B' en G', dan kan het gebeuren, dat de beide Φ-lijnen BA en BG gedeeltelijk samenvallen in $B'K$, zoodat er eene vertakte Φ-lijn $A'B'G'$ ontstaat, waarop al de drie wortels gelegen zijn. Heeft nu nog een verdere verandering in denzelfden zin plaats, dan gaat A' bijv. naar A'', B' naar B'' en G' naar G'', en nu is nog wel altijd B'' met G'', maar in plaats van B'' is nu G'' met A'' verbonden. Geen verandering zou er in de verbinding zijn ontstaan, wanneer bij het samenvallen der Φ-lijnen de drie wortels op eenzelfden tak van de Φ-lijn kwamen te liggen, zooals een blik op fig. 3 onmiddelijk leert. Hierbij heeft dan ook eigenlijk geen samenvallen der *verbindende* Φ-lijnen plaats; de deelen $B'G'$ en $A'B'$ be-

---

*) Dat zijn de lijnen $\Phi = \text{const.}$
Zie t a. p. N°. 13.

hooren wel tot dezelfde algebraïsche kromme, maar niet tot dezelfde Φ-lijn.

Dat in het geval van fig. 2 die verbinding veranderen *moet*, is door die figuur wel aanschouwelijk gemaakt, maar nog niet bewezen. Om dat bewijs te leveren zullen wij aantoonen, dat twee Φ-lijnen die dezelfde twee (veranderlijk onderstelde) wortels verbinden en door denzelfden wortel van de afgeleide vergelijking gaan, elkaar niet kunnen snijden behalve in dat punt.

Onderstellen wij dat A en B (fig. 4) twee wortels zijn verbonden door eene Φ-lijn, die over K, een wortel der afgeleide loopt. Laat $B'A'$ een tweede stand van die Φ-lijn zijn, nadat de bekende term der vergelijking veranderd is, en nemen wij aan, dat deze twee lijnen elkaar behalve in K nog in N snijden.

De vergelijkingen dier beide lijnen kunnen worden voorgesteld door

$$sX + tY = s\gamma_1 + t\delta_1,$$
$$s'X + t'Y = s'\gamma_2 + t'\delta_2.$$

waarin s, t, s' en t' getallencoëfficiënten zijn en γ_1 en δ_1 de waarden die X en Y in A en B, γ_2 en δ_2 die welke deze zelfde functiën in A' en B' aannemen*). Verandert men nu de waarden van γ_1 en δ_1, zoo dat $s\gamma_1 + t\delta_1$ onveranderd blijft, dan verplaatst men de wortels A en B langs de lijn AKB en het is gemakkelijk in te zien, dat men een van die wortels elk willekeurig punt van die lijn kan doen innemen, zonder dat deze ophoudt eene Φ-lijn te zijn. Zoo kan men het punt A in N brengen. Maar evenzoo kan men A' langs de lijn $A'KB'$ naar N doen gaan; A en A' zouden dan dezelfde wortel van dezelfde vergelijking geworden zijn, die door twee verschillende Φ-lijnen met K zou zijn verbonden, wat onmogelijk is.

---

*) Volgens onze bepaling van X en Y in N°. 2 hebben deze grootheden uitsluitend op de vierde-machtsvergelijking betrekking. Niets verhindert echter aan de letters bij het hier gegeven bewijs voor elk hoogere-machtsvergelijking de analoge beteekenis toe te kennen.

Hieruit ziet men dat in fig. 2 B'' niet met A'' kan zijn verbonden, daar de verbindingslijn de vertakte φ-lijn $A'B'G'$ behalve in L noodzakelijk ergens zou moeten snijden, wat volgens het voorgaand niet mogelijk is.

5. Het is uit dit alles duidelijk dat de lijnen, wier vergelijking den vorm

$$sX + tY = \epsilon$$

heeft, en die door twee of meer wortels van de afgeleide gaan, voor het onderzoek, dat wij ons voorstellen, van veel belang zijn. Het is met het opsporen en nader onderzoeken van die lijnen dat wij ons nu gaan bezighouden, en wel in de eerste plaats met die, welke door alle drie de wortels van de afgeleide gaan.

Is

$$sX + tY = \epsilon \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

de vergelijking van zulk eene lijn, dan moet

$$sX_1 + tY_1 = \epsilon, \quad sX_2 + tY_2 = \epsilon, \quad sX_3 + tY_3 = \epsilon \ldots \quad (24)$$

zijn, waaruit door eliminatie volgt:

$$X_3 Y_2 - Y_3 X_2 + X_1 Y_3 - Y_1 X_3 + X_2 Y_1 - Y_2 X_1 = 0,$$

en hiervoor kan men blijkens (21) ook schrijven:

$$I.P = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Aan deze vergelijking kan op tweeërlei wijze worden voldaan, in de eerste plaats door $I = 0$. De drie wortels liggen dan in eene rechte lijn; bij den aangenomen stand van het coördinatenstelsel zijn ze dan alle reëel. Wij kunnen, zonder aan de algemeenheid te kort te doen, nu aannemen, dat $\omega = 0$ en a niet kleiner dan $2p$ is; de betrekkelijk ligging der wortels is dan zooals in fig. 5 is aangewezen. Daar de coëfficiënten A en B van (3) in dit geval reëel zijn, is de x-as een tak van de lijn (23). De vergelijking van die lijn is hier:

$$Y = 0$$

of

$$x^3 y - y^3 x - xy(k^2 + km + m^2) + (k+m)\,km\,y = 0, \quad . \; . \; (26)$$

welke kan worden ontbonden in

$$y = 0$$

en

$$x(x^2 - y^2) - x(k^2 + km + m^2) + (k + m)\,km = 0.$$

Zooals wij vooruit konden weten, heeft deze lijn tot asymptoten de beide assen en de lijnen, die de hoeken tusschen de assen middendoordeelen. Geen van de asymptoten kan den bijbehoorenden tak snijden, immers voor $x = \pm y$ vindt men slechts twee snijpunten nl.:

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{en} \qquad x = \pm y = \frac{km(k+m)}{k^2 + km + m^2}$$

en de y-as snijdt de kromme alleen in den oorsprong. De tak, die de y-as tot asymptoot heeft, heeft een buigpunt op oneindigen afstand.

Is $k = 0$ dan is de vierde-machtsvergelijking van tweede-machtsvorm en de lijn (26) gaat over in de twee assen en eene gelijkzijdige hyperbool.

Het geval, dat twee wortels der afgeleide samenvallen, laten wij voor het oogenblik buiten beschouwing.

6. Aan de vergelijking (25) kan in de tweede plaats voldaan worden door

$$P = 0,$$

welke vergelijking blijkens (17), (19) en (20) ook in een der volgende vormen kan geschreven worden:

$$p^4(1 - {}^4/_3 \sin^2 \omega) - {}^1/_2 p^2 a^2 + {}^1/_{16} a^4 = 0, \; . \; . \; . \; (27)$$

$$a^3 \cos K + b^3 \cos L + c^3 \cos M = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

$$6\,R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

Men ziet dus, dat dit geval zich voordoet als 6 maal het vierkant van de straal des omgeschreven cirkels van

driehoek KLM gelijk is aan de som van de kwadraten der drie zijden. Uit (28) blijkt, dat de driehoek dan altijd stomphoekig moet zijn.

Om een overzicht te bekomen van de vormen, die deze driehoek hierbij kan aannemen, beschouwen wij (27) als de vergelijking eener kromme op pool-coördinaten, waarvan de pool in het midden der zijde a ligt en de as met die lijn samenvalt. Men bekomt dan eene kromme lijn als in fig. 6 is voorgesteld en elke driehoek door de twee punten L en M en een willekeurig punt van de kromme gevormd zal aan de voorwaarde voldoen.

Men kan zich hierbij bepalen tot den tak LPM: de punten der andere takken geven driehoeken met de daardoor gevondene gelijkvormig zijn. Dit kan men reeds daaruit opmaken, dat men voor a altijd de grootste zijde nemen kan, maar het blijkt analytisch gemakkelijk, als men de pool naar L verplaatst door de substitutie

$$p \cos \omega = p' \cos \omega' + {}^1/_2 a, \quad p \sin \omega = p' \sin \omega'.$$

Men vindt dan voor de nieuwe vergelijking:

$$p'^2 + 2\, a p' \frac{3 - 2 \sin^2 \omega'}{3 - 4 \sin^2 \omega'} + a^2 = 0.$$

Trekt men dus uit L eene willekeurige lijn LPP', dan is LM steeds middenevenredig tusschen LP en LP', waaruit de gelijkvormigheid der driehoeken LPM en LMP' volgt.

De grootste waarde, die $< LPM$ kan hebben, is 120^0 namelijk als P met L of M samenvalt; de kleinste waarde heeft die hoek, als de driehoek gelijkbeenig is, n.l. $111^0 28' 15''$. Deze grenswaarden verschillen slechts weinig, zoodat de boog LPM niet veel van een cirkelboog verschilt.

De vergelijking (25) in aanmerking nemende, vindt men voor de vergelijking der kromme (23) in dit geval

$$(X_3 - X_2)(Y - Y_1) = (Y_3 - Y_2)(X - X_1).$$

Door invoering van de in N^0. 2 en 3 gevonden waarden

en met behulp van (27), kan men deze vergelijking herleiden tot

$$Y \cos 3\omega - X \sin 3\omega = {}^2/_9 p^2 a^2 \sin \omega - {}^1/_{18} a^6 \sin \omega. \quad . \; . \; (30)$$

Na invoering van de waarden van X en Y heeft men een vergelijking, die het analytisch onderzoek der kromme mogelijk maakt. Zij wordt aanmerkelijk vereenvoudigd als de driehoek KLM gelijkbeenig is. In dat geval is $\omega = 90^0$, $a^2 = {}^4/_3 (3 + 2\sqrt{3}) p^2$, en de vergelijking (30) gaat over in

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + {}^4/_3(1 + \sqrt{3})p^2(x^2 - y^2) + \frac{16}{27}(5 + 3\sqrt{3})p^3 x +$$

$$+ \frac{16}{27}(2 + \sqrt{3})p^4 = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

De vier takken dezer kromme moeten noodzakelijk samenhangen, daar anders geen drie dubbelpunten konden bestaan, zonder dat hetzelfde paar takken elkaar tweemaal sneedt. Hierbij zijn echter nog twee gevallen mogelijk: eenzelfde tak kan de drie andere snijden, of de eerste kan door den tweeden, de tweede door den derden, en deze weer door den vierden gesneden worden. Dat zich hier het laatste geval moet voordoen, blijkt daaruit, dat alles hier symmetrisch moet zijn met betrekking tot de x-as, en deze lijn geen tak van de kromme is. Dit alles wordt bevestigd door het analytisch onderzoek der vergelijking. In het punt $x = -{}^2/_3 p$, $y = 0$ vindt men twee takken, die de x-as onder hoeken van 45^0 snijden. Evenzoo vindt men twee elkaar loodrecht snijdende takken in elk der punten $x = {}^1/_3 p$, $y = \pm {}^1/_3 p \sqrt{(9 + 6\sqrt{3})}$. De asymptoten maken met elkaar hoeken van 45^0 en met de assen van $22^1/_2{}^0$. De lijn is afgebeeld fig. 7.

7. Wanneer de coëfficiënten der vergelijking (3) geleidelijk worden veranderd, en dus de wortels der vergelijking (4) even als de hier beschouwde lijn een geleidelijke verplaatsing ondergaan, dan kan de samenhang van de takken dezer lijn alleen veranderen op het oogenblik, dat de lijn begint of ophoudt door een wortel van de afgeleide verge-

lijking te gaan. Blijft nu de lijn voortdurend door de drie wortels van de afgeleide gaan, dan kan er dus geen verandering in den samenhang harer takken plaats grijpen, en deze blijft derhalve voor alle gevallen, waarin aan de vergelijking (27) is voldaan dezelfde. Het spreekt van zelf, dat de symmetrie met betrekking tot de x-as ophoudt, als de driehoek niet meer gelijkbeenig is.

De zooeven gemaakte opmerking is algemeen: de samenhang van de takken eener lijn $sX + tY = \varepsilon$ kan, niet alleen wanneer de wortels der afgeleide vergelijking onveranderd blijven, maar ook, als die geleidelijk veranderen, uitsluitend dan eene verandering ondergaan, als twee of meer wortels van de afgeleide samenvallen, of als de lijn begint of ophoudt door een wortel van de afgeleide te gaan. Om dit in te zien, heeft men slechts op te merken, dat in het punt, waar de verandering plaats heeft, het aantal samenhangende takken vermeerderen of verminderen moet.

8. Ingeval

$$I.P \gtrless 0$$

is, kan de lijn

$$sX + tY = \varepsilon$$

niet door al de drie wortels van de afgeleide vergelijking gaan. Er zijn dan drie van die lijnen mogelijk, ieder door twee van die punten gaande. Daarbij kunnen zich echter twee verschillende gevallen voordoen: door ieder van de twee wortels kunnen twee takken gaan, terwijl het eene paar geheel van het andere afgezonderd ligt, of een tak kan door de beide wortels gaan, en in elk van die punten door een tweeden tak gesneden worden, terwijl de vierde tak door geen enkelen wortel van de afgeleide vergelijking gaat. Eene lijn, waarbij zich het laatste geval voordoet, zullen wij in het vervolg eene *verdeelende lijn* noemen.

9. Wij wijden nu vooreerst onzen aandacht aan het geval, dat de driehoek KLM gelijkzijdig is. Wij hebben dan $\omega = 90^0$ $a = {}^2/_3\, p \sqrt{3}$, en uit de in N^0. 2 afgeleide betrekkingen volgt:

$$X_1 = -\frac{16}{27}p^4,\ Y_1 = 0,\ X_2 = X_3 = \frac{8}{27}p^4,\ Y_2 = -Y_3 = \frac{8}{27}p^4\sqrt{3},$$

$$X = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \frac{32}{27}p^3x,\ Y = 4x^3y - 4xy^3 + \frac{32}{27}p^3y.$$

De lijn

$$X(Y_2 - Y_3) - Y(X_2 - X_3) = X_3Y_2 - Y_3X_2$$

gaat hier over in

$$X = X_3$$

of

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \frac{32}{27}p^3x = \frac{8}{27}p^4,$$

of in poolcoördinaten

$$r^4 \cos 4\varphi + \frac{32}{27}p^3 r \cos\varphi = \frac{8}{27}p^4. \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Deze lijn moet door de beide imaginaire wortels gaan en symmetrisch zijn met betrekking tot de x-as. Voor $\varphi = 0$ heeft r twee reëele waarden, waaruit volgt, dat er een tak moet zijn, die de beide imaginaire wortels verbindt. De lijn is dus eene *verdeelende lijn*. De takken, die de x-as snijden, kunnen niets anders zijn dan de tak die de beide wortels verbindt en de vrije tak. Het verder analytisch onderzoek der vergelijking bevestigt dit. De kromme is voorgesteld in fig. 8. Hare takken zijn LM, FG, HI en EJ.

Daar de figuur in dit geval door eene wenteling van 120° om den oorsprong niet veranderen kan, moeten er door de punten K en M en door de punten L en M nog twee verdeelende lijnen gaan, die met (32) gelijk en gelijkvormig zijn. Werkelijk vindt men door substitutie van de gevonden waarden in de vergelijkingen

$$X(Y_3 - Y_1) - Y(X_3 - X_1) = X_1Y_3 - Y_1X_3,$$
$$X(Y_1 - Y_2) - Y(X_1 - X_2) = X_2Y_1 - Y_2X_1,$$

en na invoering van poolcoördinaten

$$\left.\begin{aligned} r^4 \cos 4(\varphi + 120^0) + \frac{32}{27} p^3 r \cos(\varphi + 120^0) &= \frac{8}{27} p^4, \\ r^4 \cos 4(\varphi - 120^0) + \frac{32}{27} p^3 r \cos(\varphi - 120^0) &= \frac{8}{27} p^4. \end{aligned}\right\} . (33)$$

De samenhangende takken van een der drie verdeelende lijnen kunnen die van een der andere, behalve in het gemeenschappelijk dubbelpunt, niet snijden. Immers het geheele aantal snijpunten moet vier bedragen, het gemeenschappelijk dubbelpunt geldt voor twee, en op ieder der vrije takken moet een snijpunt liggen, terwijl deze, zooals uit de ligging dadelijk blijkt, elkander niet snijden kunnen *).

Uit het voorgaande volgt met behulp der figuur, dat de drie *verdeelende lijnen* het vlak in acht en twintig deelen verdeelen.

De waarde van P is in dit geval $\frac{128}{81} p^6$, en dus positief.

10. Stellen wij ons nu voor, dat de ligging van de wortels der afgeleide vergelijking langzamerhand veranderd wordt, echter zoo, dat geen twee wortels samenvallen, en geen van de verdeelende lijnen ooit door al de drie wortels van de afgeleide gaat. Dan zal in de eerste plaats P niet van teeken veranderen. Verder zal de samenhang tusschen de verschillende deelen eener zelfde lijn onveranderd blijven, en er kunnen geen nieuwe snijpunten ontstaan of snijpunten verdwijnen tusschen de takken der verschillende verdeelende lijnen. Om dit laatste te doen zien, is het voldoende aan te toonen dat een willekeurige asymptoot van een der drie krommen altijd binnen denzelfden hoek moet blijven door twee asymptoten eener andere verdeelende lijn gevormd.

---

*) Dit blijkt ook uit de redeneering in N°. 4, die eigenlijk neerkomt op het bewijs, dat twee takken of twee groepen van samenhangende takken van verschillende lijnen van den vorm $s X + t Y = \epsilon$, die door een zelfden wortel van de afgeleide gaan, elkaar niet snijden kunnen, behalve in den wortel.

Dit laatste zal bewezen zijn, zoodra gebleken is, dat nooit de asymptoten van twee der verdeelende lijnen kunnen samenvallen.

Om dit bewijs te leveren, merken wij op, dat de termen van den hoogsten graad der drie vergelijkingen aldus kunnen worden geschreven:

$$r^4 \cos 4\varphi (Y_3 - Y_2) - r^4 \sin 4\varphi (X_3 - X_2),$$
$$r^4 \cos 4\varphi (Y_1 - Y_3) - r^4 \sin 4\varphi (X_1 - X_3),$$
$$r^4 \cos 4\varphi (Y_2 - Y_1) - r^4 \sin 4\varphi (X_2 - X_1),$$

of na substitutie van (10) en na weglating van een constanten factor:

$$r^4 \sin (3\omega - 4\varphi), \qquad r^4 \sin (3\omega_1 + 4\mu_1 - 4\varphi),$$
$$r^4 \sin (3\omega_2 + 4\mu_2 - 4\varphi)$$

De hoeken, die de asymptoten met de x-as maken, zijn dus voor de drie lijnen respectievelijk:

$$^3/_4\omega + \frac{n}{4}\pi, \qquad ^3/_4\omega_1 + \mu_1 + \frac{n'}{4}\pi, \qquad ^3/_4\omega_2 + \mu_2 + \frac{n''}{4}\pi$$

waarin n, n' en n'' positieve of negatieve geheele getallen voorstellen. Zullen dus b. v. van de beide eerste de asymptoten samenvallen, dan moet

$$^3/_4\omega + \frac{n}{4}\pi = {}^3/_4\omega_1 + \mu_1 + \frac{n'}{4}\pi,$$

of

$$3\omega = 3\omega_1 + 4\mu_1 + (n' - n)\pi$$

zijn, en hieruit zou volgen:

$$\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{Y_1 - Y_3}{X_1 - X_3},$$

of

$$I.P = 0,$$

welk geval wij hebben uitgesloten.

11. Op twee wijzen kan nu de toestand veranderen, vooreerst door dat twee wortels samenvallen. Zet men dan echter de verandering voort, zoodat de twee samenvallende wortels hunne beweging in denzelfden zin voortzetten, dan kan de nieuwe vorm, dien de figuur heeft aangenomen weer geleidelijk en zonder een overgangstoestand te passeeren in den vorm overgebracht worden, waarbij de driehoek KLM gelijkzijdig is. Na het uiteenwijken der wortels treedt dus weer dezelfde wijze van samenhang tusschen de takken der verdeelende lijnen op, en dezelfde betrekkelijke ligging dier takken, die voor het samenvallen bestond.

P is op het oogenblik dat de twee wortels samenvielen gelijk aan nul geweest, maar heeft bij die gelegenheid haar teeken niet veranderd. Immers er heeft bij die gelegenheid slechts een verwisseling van l met m of, wat op hetzelfde neerkomt, eene teekenverandering van a plaats gehad, welke grootheid in P slechts in evene machten voorkomt *). Op het overgangsgeval zelf komen wij later terug.

12. Maar nog op eene andere wijze kan de toestand eene verandering ondergaan, namelijk door dat de driehoek KLM tijdelijk een der vormen heeft aangenomen, waarbij het in N°. 6 behandelde bijzondere geval plaats heeft, en daarna de stompe hoek grooter geworden is, dan bij dezelfde verhouding der omliggenden zijden met dat bijzonder geval zou overeenkomen. Hierdoor is P van teeken veranderd. Liggen namelijk de drie punten K, L en M op een rechte lijn, eene ligging waartoe zij nu kunnen geraken zonder dat P weer de waarde nul bereikt, dan is $\omega = 0$ en dus

$$P = {}^1/_3\, a^2 (2\, p^2 - {}^1/_2\, a^2)^2 = - {}^4/_3\, a^2 b^2 c^2 ,$$

zoodat P negatief is en negatief blijft, zoolang de figuur niet weer in den vroeger beschreven toestand terugkeert. De samenhang tusschen de takken der verdeelende lijnen

*) I is hierbij ook van teeken veranderd, maar men kan die grootheid weer positief maken door L en M en l en m met elkaar te verwisselen, waardoor a weer van teeken verandert.

kan nu veranderd zijn, daar voor een oogenblik alle drie die lijnen samenvielen. Hoe echter de samenhang ook zij, deze moet nu steeds dezelfde blijven, zoolang niet weer een van de overgangstoestanden is overschreden. Bovendien kan die samenhang niet veranderd zijn, nadat het overgangsgeval is gepasseerd, waarbij de drie wortels in een rechte lijn liggen, want de vormen, die de figuur voor en na dien overgang kan aannemen, zijn natuurlijk twee aan twee symmetrisch. Ook het teeken van P kan daarbij niet zijn veranderd, daar P niet gelijk aan nul geweest is*). De slotsom is, dat in al de gevallen waarin P negatief is, de samenhang tusschen de takken der beschouwde lijnen dezelfde moet zijn.

Er blijft dus nog slechts over dien samenhang in een bijzonder geval te onderzoeken.

13. Het bijzondere geval, dat wij ter onderzoeking kiezen is dat, waarbij

$$b = c \text{ en } a^2 = \frac{4p^2}{4\sqrt{2} - 5}$$

is. Wij vinden voor dat geval

$$X_1 = \frac{8}{27}\,\frac{2\sqrt{2} - 1}{4\sqrt{2} - 5}\,p^4,$$

$$X_2 = X_3 = \frac{8}{27}\cdot\frac{-19 + 10\sqrt{2} + 2\sqrt{4}}{4\sqrt{2} - 5}\,p^4,$$

$$Y_1 = 0, \qquad Y_2 = -Y_3 = \frac{8p^4}{3(4\sqrt{2} - 5)}\sqrt{\frac{1}{4\sqrt{2} - 5}},$$

$$X_3 - X_1 = -(Y_3 - Y_1)\sqrt{3}, \qquad X_1 - X_2 = (Y_1 - Y_2)\sqrt{3},$$

terwijl men heeft:

$$X = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \frac{8}{3}\cdot\frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5}\,p^2(x^2 - y^2) + \frac{32}{27}\cdot\frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5}\,p^3x,$$

---

*) Omtrent het teeken van I geldt dezelfde opmerking als in de vorige noot is gemaakt.

$$Y = 4(x^3 y - y^3 x) + \frac{16}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} p^2 x y + \frac{32}{27} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} p^3 y.$$

De vergelijkingen der drie lijnen, die als verdeelende lijnen in aanmerking kunnen komen, zijn hier

$$X = X_3, \qquad X + Y\sqrt{3} = X_1, \qquad X - Y\sqrt{3} = X_1,$$

of na substitutie der bovenstaande waarde en invoering van poolcoördinaten

$$r^4 \cos 4\varphi + \frac{8}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} r^2 p^2 \cos 2\varphi + \frac{32}{27} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} r p^3 \cos \varphi =$$
$$= \frac{8}{27} \cdot \frac{-19 + 10\sqrt{2} + 2\sqrt{4}}{4\sqrt{2} - 5} p^4, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} & r^4 \cos 4(\varphi - 120^0) + \frac{8}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} r^2 p^2 \cos 2(\varphi + 120^0) + \\ & + \frac{32}{27} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} r p^3 \cos(\varphi - 123^0) = \frac{8}{27} \cdot \frac{2\sqrt{2} - 1}{4\sqrt{2} - 5}, \\ & r^4 \cos 4(\varphi + 120^0) + \frac{8}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} r^2 p^2 \cos 2(\varphi - 128^0) + \\ & + \frac{32}{27} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} r p^3 \cos(\varphi + 120^0) = \frac{8}{27} \cdot \frac{2\sqrt{2} - 1}{4\sqrt{2} - 5}. \end{aligned}\right\} \ldots (35)$$

Men ziet, dat de twaalf asymptoten dezer drie kromme lijnen, evenals in het geval van den gelijkzijdigen driehoek, de vier rechte hoeken om den oorsprong in hoeken van 15^0 verdeelen. Stelt men in (34) $\varphi = 0$, dan bekomt men eene vergelijking in r, die geen enkelen reëelen wortel heeft. Dit blijkt onmiddelijk, als men den eersten term weglaat: daardoor ontstaat eene tweede-machtsvergelijking met imaginaire wortels, waarvan het eerste lid steeds positief is, en daar ook de eerste term altijd positief blijft, kan het eerste lid der op nul herleide vergelijking niet van teeken veranderen of nul worden. De x-as snijdt alzoo deze kromme niet; er bestaat dus geen tak, die door de beide imaginaire wortels gaat. De kromme is derhalve geen

verdeelende lijn, maar bestaat uit twee paar takken, waarvan die van hetzelfde paar elkaar telkens in een van de imaginaire wortels snijden. De kromme kan als voor ons doel van geen belang verder buiten beschouwing blijven.

14. Onderzoeken wij nu de eerste der krommen (35). Voor $\varphi = 0$ vinden wij voor r twee wortels, gelijk aan $-{}^2/_3 p$ en twee imaginaire wortels. De x-as snijdt dus de kromme nergens anders dan in K. Hiermede is reeds uitgemaakt, dat de kromme eene verdeelende lijn moet zijn. Zij kan namelijk niet bestaan uit twee takken, gaande door den reëelen wortel en twee takken gaande door M (fig. 9). De laatstgenoemde twee takken zouden dan moeten behooren bij de vier halve asymptoten met dat punt aan dezelfde zijde van de x-as gelegen. Voor de beide andere takken zouden dan de andere vier halve asymptoten overblijven, en dit kan onmogelijk zonder dat minstens een der takken de x-as snijdt.

Gaan wij nu na hoe de verschillende takken over de verschillende halve asymptoten verdeeld zijn, en nummeren wij daartoe de halve asymptoten van I tot VIII, zooals in fig. 9 is aangewezen.

KM	heeft	tot	asymptoten	IV en VII,
$F'G'$	»	»	»	VI en VIII,
$H'I'$	»	»	»	I en V,
$E'J'$	»	»	»	II en III.

Dit alles blijkt uit de volgende opmerkingen: Laat men de wortels der afgeleide nog een weinig van plaats veranderen, zoodat zij alle op de y-as komen te liggen, dan moet de tak $H'I'$ even als de asymptoot I—V in de x-as overgaan. Aan de negatieve zijde liggen nu nog alleen $F'G'$ en het eene uiteinde van KM, het laatste tusschen de twee uiteinden des eerstgenoemden taks; deze heeft dus VI en VIII, gene VII tot asymptoten. Van de drie overblijvende moeten nu twee op elkaar volgende bij den tak $E'J'$ behooren dus II en III of III en IV, zoodat voor MK II of IV overblijft. Neemt men echter in aanmerking, dat MK den tak KL van de tweede lijn (35), wiens bestaan uit de

symmetrie der figuur volgt niet snijden kan (zie de noot op N⁰. 8), dan blijkt, dat deze tak bij IV, en dus de vrije tak $E' J'$ bij II en III behoort. Dit alles was natuurlijk ook uit eene discussie der eerste vergelijking (35) af te leiden. Na al het voorgaande is deze discussie voor ons doel overbodig. Alleen is het noodig voor het teekenen der figuur eenige punten te bepalen en vooral na te gaan, welke takken door de bijbehoorende asymptoten gesneden worden. Voor de asymptoten II—VI en III—VII is dit niet mogelijk, zooals zonder nader onderzoek blijkt. De beide andere asymptoten moeten in de eene of in de andere richting den bijbehoorenden tak snijden. Door φ successivelijk gelijk aan $7^1/_2{}^0$ en $142^1/_2{}^0$ te stellen, zal men vinden, dat de halve asymptoten V en IV de bijbehoorende takken snijden. Hierbij is natuurlijk in het oog te houden dat, wat ten dezen opzichte voor dit bijzonder geval geldt, nog niet waar behoeft te zijn voor al de andere gevallen tot dit type behoorende.

15. Wij onderstelden tot nog toe, dat geen twee wortels van de afgeleide vergelijking samen vielen. Is dat wel het geval, dan kunnen wij b. v. aannemen, dat $b = 0$ is, waardoor men heeft

$$I = P = 0.$$

De vergelijking der verdeelende lijn is in dit geval (zie N⁰. 5)

$$4(x^3 y - y^3 x) - {}^{16}/_3\, x\, y\, p^2 - \frac{64}{27} p^3 y = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

en bestaat dus uit de x-as en eene kromme van den derden graad

$$x^3 - y^2 x - {}^4/_3\, p^2 x - {}^{16}/_{27} p^3 = 0.$$

De laatste heeft in den enkelvoudigen wortel een enkelen tak, en in den dubbelen wortel twee takken, die elkaar en de x-as onder hoeken van 60^0 snijden. Uit de ligging der takken volgt onmiddelijk, dat geen tak door de bijbehoo-

rende asymptoot gesneden kan worden. De kromme is afgebeeld in fig. 10.

Men kan in dit geval elke lijn, wier vergelijking den vorm heeft

$$sX + tY = \varepsilon,$$

en die door den dubbelen wortel der afgeleide gaat, als eene verdeelende lijn aanmerken, alleen de zooeven beschouwde is echter voor ons van belang. Zij verdeelt het z-vlak in acht deelen.

Vallen de drie wortels samen, dan wordt $p = 0$ en de vergelijking (36) gaat over in

$$xy(x^2 - y^2) = 0.$$

Deze vergelijking stelt vier rechte lijnen voor, die elkaar in den oorsprong onder hoeken van 45^0 snijden. Elk ander stelsel van vier zulke lijnen door hetzelfde punt gaande, heeft echter evenveel recht op de naam van verdeelende lijn, zooals reeds daaruit blijkt, dat het coördinatenstelsel, wat de richting der assen betreft, volkomen onbepaald is.

16. Het voorgaande wordt samengevat in de volgende tabel.

A. $I \gtrless 0.$

I. P positief.

Er zijn drie verdeelende lijnen, die het z-vlak in acht en twintig deelen verdeelen (fig. 8).

II. P negatief.

Er zijn twee verdeelende lijnen, wier takken het z-vlak in zestien deelen verdeelen (fig. 9).

III. $P = 0.$

Er is ééne verdeelende lijn, die door al de drie wortels der afgeleide gaat. Twee takken gaan ieder door twee van die punten en de twee andere ieder door één. Het z-vlak wordt in acht deelen verdeeld (fig. 7).

B. $I = 0.$

I. P negatief.

De drie wortels liggen in eene rechte lijn, maar geen twee vallen er samen. Er is ééne verdeelende lijn, waarvan eenzelfde tak, de evengenoemde rechte lijn door de drie wortels gaat. Zij verdeelt het vlak in acht deelen (fig. 5).

II. $P = 0.$

$\alpha.$ $p \gtrless 0.$

Twee van de wortels der afgeleide vallen samen. Er zijn oneindig veel verdeelende lijnen, waarvan er ééne door de drie wortels gaat. Door den dubbelen wortel gaan drie, door den enkelen wortel twee takken. Het z-vlak wordt in acht deelen verdeeld (fig. 10).

$\beta.$ $p = 0.$

Er zijn oneindig veel verdeelende lijnen. Zij bestaan ieder uit vier rechte lijnen, die het vlak om het punt, waar de drie wortels samenvallen, in acht gelijke deelen verdeelen.

17. Thans zullen wij nagaan, hoe de vier wortels der vergelijking (3) met elkaar door eindige Φ-lijnen zijn verbonden, wanneer zij in de verschillende deelen van het z-vlak gelegen zijn. Al de verschillende wijze van verbinding tusschen de wortels eener vierde-machtsvergelijking en hare afgeleiden, die men zich denken kan, zijn in fig. 11 a—z, schematisch voorgesteld, op eene wijze, die wel geen nadere toelichting zal behoeven. Alleen zij vermeld dat A, B, C en D de wortels der vergelijking K, L en M, die van hare afgeleide voorstellen, en dat, waar twee of meer wortels der vierde-machtsvergelijking samenvallen, de daarmede tevens samenvallende wortels der afgeleide vergelijking niet zijn aangeduid.

Wij beginnen ons onderzoek met het geval A I, en on-

derstellen eenvoudigheidshalve, dat de driehoek KLM gelijkzijdig is; voor alle andere vormen tot dit geval behoorende, is de toestand natuurlijk volkomen dezelfde. Beginnen wij met $\gamma + i\delta = 0$ te onderstellen. Eén wortel b. v. A ligt dan in den oorsprong; de drie andere zijn er mede door rechte Φ-lijnen verbonden, zooals uit de vergelijking gemakkelijk is op te maken en ook uit de symmetrie der figuur volgt. De wortels A, B, C en D liggen dan respectievelijk in de deelen van het z-vlak met 1, 8, 15 en 22 gemerkt. Zoolang A nu binnen 1 blijft, zullen de drie andere respectievelijk binnen de deelen 8, 15 en 22 blijven, en met A verbonden zijn. Wij hebben dus de verbinding a (fig. 11). Gaat A naar 2, dan gaat B naar 9, C naar 16 en D naar 23, want, als een van de wortels een van de verdeelende lijnen overschrijdt, moeten de andere het ook doen. Bij dezen overgang heeft geen verandering in de verbinding plaats gehad. Op het oogenblik van de overgang bestond de verbinding c, daarna weder de verbinding a. Gaat nu echter A naar 3, dan gaat B naar 10, C naar 17 en D naar 24. De verbinding van A met C is nu opgeheven, maar B is met C verbonden geworden, zoodat nu de verbinding b bestaat. Tijdens den overgang had de verbinding d plaats. Zoo kan men achtereenvolgens A nog in 4, 5, 6 en 7 brengen, waardoor B in 11, 12, 13 en 14, C in 18, 19, 20 en 21 en D in 25, 26, 27 en 28 komt. Men zal bevinden, zooals trouwens ook uit de symmetrie der figuur volgt, dat hierbij beurtelings de verbindingswijzen a en b optreden, terwijl bij den overgang steeds de verbinding d bestaat. Als algemeene regel vindt men hierbij: Ligt een van de wortels binnen den kromlijnigen driehoek KLM of in een der aangrenzende deelen, dan bestaat de verbinding a. In alle andere gevallen, waarin zij niet op een verdeelende lijn liggen, heeft de verbinding b plaats. Vallen twee van de wortels b. v. in K samen, dan liggen de beide andere in de snijpunten R en W, en het is de verbinding r die zich voordoet.

18. Beschouwen wij thans het tweede hoofdgeval A II (fig. 9).

Beginnen wij weer met een van de wortels A in den oor-

sprong aan te nemen, dan moet b. v., als wij KLM gelijkbeenig onderstellen, C op de x-as in 9 gelegen zijn, B en D liggen dan in 5 en 13. Dat B b. v. niet in 6 kan liggen, blijkt daaruit, dat A met B moet kunnen samenvallen in L, en om dat punt te bereiken over $H'I'$ zou moeten gaan, maar dan moet B daarbij ook een tak van dezelfde verdeelende lijn passeeren Evenzoo voor D. De wortel A moet met de drie andere wortels verbonden zijn, want eene verbinding $B-C$ b. v. kan niet bestaan, omdat de verbindende lijn een samenhangende groep takken van dezelfde verdeelende lijn tweemaal zou moeten snijden. Gaat A naar 2, dan gaan B, C en D naar 6, 10 en 14. De verbinding $D-A$ is door $D-C$ vervangen en het is nu de verbinding b die plaats heeft. Bij de overgang bestond de verbinding d. Brengt men A nog naar 3 en 4. dan zal men bevinden, dat behalve op het oogenblik van overgang steeds de verbinding b blijft bestaan, waarbij echter de volgorde der wortels telkens verandert. Tijdens den overgang van 2 naar 3 of van 3 naar 4 bestaat de verbinding e. Maar men kan ook A van 2 naar 7 doen gaan, en bij deze overgang treedt de verbinding f op.

Vallen twee wortels in K samen, dan is r de verbindingstoestand, die daarbij plaats heeft; de twee andere wortels liggen namelijk dan in R en S. Geschiedt hetzelfde in L of M, dan doet zich de verbinding s voor.

19. In het overgangsgeval A III (fig. 7) kunnen de wortels in 1, 3, 5 en 7 of in 2, 4, 6 en 8 liggen. In het eerste geval is a, in het tweede b de optredende wijze van verbinding. Deze gevallen kunnen op twee verschillende wijzen in elkaar overgaan, n.l. doordat een wortel van 1 naar 2 of van 1 naar 4 gaat. In het eerste geval doet zich de toestand g, in het tweede de toestand h voor. Vallen twee wortels samen, dan is t of u de verbinding, die zich vertoont, naarmate het samenvallen in K of in een der punten L of M plaats heeft.

In het geval B I (fig. 5) komt steeds de verbinding b voor, zoolang de wortels niet op de verdeelende lijn liggen. Is dit wel het geval, dan zijn er vier verschillende over-

gangsgevallen mogelijk, naarmate de wortels over de verschillende takken verspreid zijn, namelijk i, j, k en l. Vallen twee wortels samen, dan heeft men v, w of x, naarmate het samenvallen in K, M of L plaats heeft. In het bijzondere geval dat $k = 0$ is, kan de verbinding x' voorkomen. Wij toonen dit later nader aan.

In het geval B II α (fig. 10) bestaat in het algemeen de verbinding m, maar er zijn drie overgangsgevallen mogelijk, n.l. n, o en p, die zich zullen voordoen, naarmate een wortel uit 1 naar 6, naar 2 of naar 8 gaat. Vallen twee wortels samen, dan bestaat de verbinding y, en als drie wortels samenvallen de verbinding z.

In het geval B II β heeft men de verbinding q, tenzij al de wortels samen mochten vallen.

20. Zullen in het geval A I de wortels van de vergelijking (3) op een van de verdeelende lijnen liggen, dan moet een van de drie uitdrukkingen

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(Y_3 - Y_2) - \delta(X_3 - X_2) - (X_2\,Y_3 - Y_2\,X_3), \\ \gamma(Y_1 - Y_3) - \delta(X_1 - X_3) - (X_3\,Y_1 - Y_3\,X_1), \\ \gamma(Y_2 - Y_1) - \delta(X_2 - X_1) - (X_1\,Y_2 - Y_1\,X_2) \end{array}\right\} \ldots (\alpha)$$

gelijk aan nul zijn, en daar deze uitdrukkingen ten opzichte van γ en δ van den eersten graad zijn, is het gemakkelijk in te zien, dat zij van teeken zullen veranderen, telkens als de wortels de overeenkomstige verdeelende lijn overschrijden.

Stellen wij $\gamma = \Lambda \cos \lambda$, $\delta = \Lambda \sin \lambda$, dan kunnen wij blijkens (10) en (22) voor deze uitdrukkingen ook schrijven

$$\left.\begin{array}{l} {}^2/_3\,\Lambda p\,a^3 \cos(\lambda - 3\,\omega) + {}^1/_9\,I(P + {}^8/_3\,a^4 b\,c \cos K), \\ {}^2/_3\,\Lambda p_1 b^3 \cos(\lambda - 3\omega_1 - 4\mu_1) + {}^1/_9 I(P + {}^8/_3\,a\,b^4 c \cos L), \\ {}^2/_3\,\Lambda p_2 c^3 \cos(\lambda - 3\omega_2 - 4\mu_2) + {}^1/_9 I(P + {}^8/_3\,a\,b\,c^4 \cos M). \end{array}\right\} \ldots (a)$$

Men zou met deze drie uitdrukkingen als wortels eene derde-machtsvergelijking kunnen samenstellen, wier coëfficiënten symmetrisch zouden zijn, ten opzichte van de wortels der afgeleide vergelijking. Men mag hieruit echter niet besluiten, dat de coëfficiënten dier vergelijking rationeel in

de reëele en imaginaire deelen van de coëfficiënten der vergelijking (3) zouden kunnen worden uitgedrukt.

Als een van de wortels van (3) gelijk aan nul is, en de driehoek KLM is scherphoekig, dan zijn de drie uitdrukkingen (a) alle positief. Dit zal zoo blijven, zoolang een wortel binnen het gedeelte 1 van het z-vlak blijft (fig. 8). Is de driehoek stomphoekig, dan kan het gebeuren, dat de oorsprong niet binnen het gedeelte 1 ligt, maar toch zullen binnen dat gedeelte altijd de drie uitdrukkingen (a) positief zijn, zooals men gemakkelijk inziet, als men dit geval langzamerhand uit dat van den scherphoekigen driehoek laat ontstaan. Om in een van de deelen 2, 11 of 20 te komen, moet de wortel uit 1 ééne verdeelende lijn passeeren, ligt dus een van de wortels in een van die deelen, dan zullen twee van de uitdrukkingen (a) positief en één negatief zijn. Wij besluiten hieruit, dat, zal de verbinding fig. 11 a tusschen de wortels der vergelijking (3) bestaan, er onder de uitdrukkingen (a) meer positieve dan negatieve moeten zijn. Zal de verbinding b zich voordoen, dan moet een van de wortels in 10, 12 of 21 liggen, en om van 1 uit daar te komen, moeten twee verdeelende lijnen worden gepasseerd, en er zullen dus in dat geval onder de uitdrukkingen (a) meer negatieve dan positieve zijn. Alle drie kunnen zij niet negatief worden, daar hunne som gelijk is aan $I \times P$, welke uitdrukking hier positief is.

Is een der drie uitdrukkingen (a) gelijk aan nul, dan kunnen de twee andere positief of verschillend van teeken zijn. In het eerste geval ligt een wortel op de grens van 1, en bestaat de verbinding c (fig. 11), in het tweede geval is het de verbinding d die zich voordoet.

Zijn er onder de uitdrukkingen (a) twee die verdwijnen, dan liggen twee van de wortels van (3) in K, L of M, en wij hebben de verbinding r.

21. In het geval A II zijn er slechts twee verdeelende lijnen n. l. die welke aan de beide laatste uitdrukkingen (a) beantwoorden. Wij hebben dus hier voornamelijk met die beide uitdrukkingen te maken. In den oorsprong, dus in het geheele met 1 gemerkt deel van het z-vlak (fig. 9),

zijn beide positief *), maar ook alleen, wanneer binnen 1 een wortel van (3) ligt, is dit het geval, terwijl ook alleen in dit geval de verbinding *a* (fig. 11) bestaat. Ligt een van de wortels in 2 of in 16, dan hebben de beide laatste uitdrukkingen *a* verschillende teekens, en bestaat de verbinding *b*. Dit laatste is ook het geval als een van de wortels in 3 ligt, in welk geval de beide laatste uitdrukkingen (*a*) negatief zijn. Men zou hier nog onderscheid kunnen maken tusschen de zigzagsgewijze verbinding, waarbij de wortels in de volgorde waarin zij verbonden zijn beurtelings ter weerszijden van de gebroken kromme lijn *KLM* liggen, en de verbinding, waarbij dit niet het geval is. De eerste heeft plaats, als de teekens der uitdrukkingen (*a*) ongelijk zijn, de tweede, als zij beide negatief zijn.

Er zijn in dit geval drie verschillende overgangsvormen, n. l.: *d*, *e* en *f*. In elk van deze drie gevallen is een der beide uitdrukkingen (*a*) gelijk aan nul. In het eerste is de overblijvende positief in de beide andere negatief. Wil men een algebraïsch kenmerk, dat tusschen de beide laatste gevallen beslist, dan moet men zijn toevlucht nemen tot de eerste der uitdrukkingen (*a*). Deze zal namelijk positief zijn, als de verbinding *e*, negatief, als de verbinding *f* bestaat. Om dit in te zien, heeft men zich slechts den loop der kromme (34) voor te stellen.

Zijn de beide laatste uitdrukkingen (*a*) gelijk aan nul, dan vallen twee wortels in *K* samen, en bestaat de verbinding *r*. Is het de eerste der uitdrukkingen (*a*), die tegelijk met een der andere verdwijnt, dan heeft het samen-

---

*) Men kan dit uitmaken door de waarden voor een bijzonder geval te berekenen, maar ook door dit geval uit het vorige te laten ontstaan. Beschouwt men dan een punt ergens in het deel 2 (fig. 8) op de x-as gelegen, en laat men nu de fig. 8 door fig. 7 heen in fig. 9 overgaan, dan ziet men, dat geen van de verdeelende lijnen gedurende de verandering door het beschouwde punt kan gaan, en de twee laatste uitdrukkingen (*a*) dus ook voor dat punt nooit van teeken kunnen veranderen. Het punt komt echter even als de oorsprong na de verandering in het deel 1 van fig. 9 te liggen, zoodat daar de beide uitdrukkingen positief zijn.

vallen der wortels in L of M plaats, en men heeft de verbinding s.

Bij dit alles is stilzwijgend ondersteld, dat K de stompe hoek is van de driehoek $K\,L\,M$, is een der andere hoeken stomp, dan verwisselen de drie uitdrukkingen (a) natuurlijk van rol.

22. Wij gaan over tot het geval A III. De drie uitdrukkingen (a) worden dan tegelijk nul, en veranderen dus tegelijk van teeken. In den oorsprong zijn de beide laatste positief, en is dus de eerste negatief. Dit zal derhalve steeds het geval zijn zoolang de verbinding a bestaat. Gaat een der wortels van (3) uit 1 (fig. 7) naar 2, dan verandert het teeken der drie uitdrukkingen (a) en tevens de verbinding, die in b overgaat.

Neemt men in aanmerking, dat als $P = 0$ is,

$$sin(\lambda - 3\,\omega) = -\,sin(\lambda - 3\,\omega_1 - 4\,\mu_1) = -\,sin(\lambda - 3\,\omega_2 - 4\,\mu_2)$$

en

$$-\frac{cos\,K}{p} = \frac{cos\,L}{p_1} = \frac{cos\,M}{p_2}$$

is, dan ziet men dat de drie uitdrukkingen (a), na respectieve deeling door $p\,a^3$, $-\,p_1\,b^3$ en $-\,p_2\,c^3$, allen overgaan in:

$$^2/_3\,A\,sin\,(\lambda - 3\,\omega) + {}^8/_{27}\,\frac{a\,b\,c\,cos\,K}{p}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a^1)$$

Deze uitdrukking is dus negatief als de verbinding a, positief als de verbinding b bestaat.

Tusschen de beide overgangsgevallen g en h (fig. 11), die hier mogelijk zijn, kunnen de uitdrukkingen (a) hier geen onderscheidende kenmerken aangeven, daar zij in beide gevallen alle drie gelijk aan nul zijn. Men kan zulke kenmerken vinden door de drie uitdrukkingen

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(X_2 - X_3) + \delta(Y_2 - Y_3) - (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + (X_1 X_3 + Y_1 Y_3), \\ \gamma(X_3 - X_1) + \delta(Y_3 - Y_1) - (X_2 X_3 + Y_2 Y_3) + (X_2 X_1 + Y_2 Y_1), \\ \gamma(X_1 - X_2) + \delta(Y_1 - Y_2) - (X_3 X_1 + Y_3 Y_1) + (X_3 X_2 + Y_3 Y_2), \end{array}\right\} \ldots (\beta)$$

te beschouwen. Vervangt men hierin γ door X en δ door Y, en stelt men dan de drie uitdrukkingen ieder afzonderlijk gelijk aan nul, dan bekomt men de vergelijkingen van drie lijnen die ieder door een van de wortels der afgeleide gaan.

Het is hieruit duidelijk dat deze drie uitdrukkingen verschillen de teekens zullen hebben bij de verschillende overgangstoestanden. Men zal gemakkelijk vinden, dat de drie uitdrukkingen na deeling respectievelijk door $p a^3$, $-p_1 b^3$, $-p_2 c^3$ overgaan in

$$\left.\begin{array}{l} {}^2/_3 A \cos(\lambda - 3\omega) + {}^4/_{27} p^2 (p^2 \cos 3\omega + a^2 \cos \omega), \\ {}^2/_3 A \cos(\lambda - 3\omega) + {}^4/_{27} p_1^2 (p_1^2 \cos 3\omega_1 + b^2 \cos \omega_1), \\ {}^2/_3 A \cos(\lambda - 3\omega) + {}^4/_{27} p_2^2 (p_2^2 \cos 3\omega_2 + c^2 \cos \omega_2). \end{array}\right\} \ldots (b)$$

Ten einde iets naders omtrent de teekens, die deze uitdrukkingen in de verschillende punten der verdeelende lijn hebben, te weten te komen, merken wij op, dat zij respectievelijk gelijk aan nul worden als in K, in L en in M twee wortels samenvallen (fig. 7). In het eerste geval zullen twee andere wortels ergens in R en in S liggen, in het tweede geval ergens in T en U en in het derde ergens in V en W. In de zes laatstgenoemde punten zal telkens een van de drie uitdrukkingen (b) van teeken veranderen. In de punt K, L, M verandert de daar verdwijnende uitdrukking (b) niet van teeken als men op denzelfde tak der verdeelende lijn blijft, maar wel als men op den anderen tak overgaat.

Onderstellen wij den driehoek K, L, M gelijkbeenig, dan zijn de tweede termen der drie uitdrukkingen achtereenvolgens 0, positief en negatief. In het punt K zijn dus de eerste termen gelijk aan nul. Tusschen K en S zijn er twee positief en een negatief, van S tot T twee negatief en een positief en voorbij T zijn alle drie negatief. Op den door M gaanden tak zijn alle drie positief. Van K tot W zijn er nog altijd twee positief en een negatief, en voorbij W alle drie positief. Als wij nog opmerken, dat in symmetrisch gelegen punten het aantal positieve en

negatieve teekens verwisseld wordt, is hiermede overal dit aantal bepaald.

Men ziet hieruit onmiddelijk, dat bij den overgangstoestand g (fig. 11) steeds de drie teekens gelijk zullen zijn, bij den toestand h niet.

Bij de verbinding t zijn de twee niet verdwijnende uitdrukkingen (b) ongelijk van teeken, bij de verbinding u gelijk.

22. Wij komen tot het geval BI. De drie uitdrukkingen (a) reduceeren zich na deeling door van λ onafhankelijke factoren alle tot $\sin \lambda$. Maar de aard der verbinding verandert niet, als λ van teeken verandert. Behalve in het overgangsgeval $\sin \lambda = 0$ bestaat hier steeds de verbinding b (fig. 11).

Er zijn hier vier overgangsgevallen mogelijk, waarvoor de algebraïsche kenmerken weer in de uitdrukkingen (β) te zoeken zijn, die voor dit geval na deeling door van γ en δ onafhankelijke factoren zich reduceeren tot

$$\gamma - X_1, \quad \gamma - X_2, \quad \gamma - X_3 \ldots\ldots \quad (c)$$

De vergelijkingen $X - X_1 = 0$, $X - X_2 = 0$, $X - X_3 = 0$, stellen drie X-lijnen voor, ieder door een van de wortels der afgeleide vergelijking gaande. Ieder van deze zal behalve in dien wortel nog in twee punten de verdeelende lijn snijden. Van de zes snijpunten liggen er vier op de x-as, zooals men met behulp van de vergelijkingen (b) gemakkelijk zal vinden, en wel twee T en U (fig. 5) rechts van L een n. l. V tusschen L en K en een linksch van M n. l. W. Door deze punten wordt de x-as in vijf deelen verdeeld; in de beide uitersten zijn de drie uitdrukkingen (c) positief, omdat voor groote waarde van x, zoowel positieve als negatieve, X dus ook γ zeer groot en positief is. In T en in W verandert $\gamma - X_1$ van teeken, zoodat tusschen T en U en tusschen V en W er twee positief en een negatief zijn. In U en in V verandert $\gamma - X_3$ van teeken, dus zijn er tusschen U en V twee negatief. In de punten K, L en M wordt telkens eene der uitdrukkingen

gelijk aan nul, zonder van teeken te veranderen, als het punt op de x-as blijft. Wel verandert het teeken als het punt van de x-as op den daarop loodrecht staanden tak der verdeelende lijn overgaat.

Gaan wij nu na, welke van de vier overgangsgevallen telkens plaats heeft, als wij achtereenvolgens alle mogelijke combinaties van teekens bij de uitdrukkingen (c) onderstellen. Zijn alle drie positief, dan ligt een wortel rechts van T en een links van W en nergens anders op x-as is een wortel mogelijk; wij hebben dus de verbinding j. Zijn er twee positief en een negatief, dan moet er een wortel liggen in elk van de deelen UT, WM, MK en KV, want in ieder van die vier deelen neemt γ al de waarde tusschen X_1 en X_3 aan. Dit beantwoordt aan de verbinding i. Zijn er onder de uitdrukkingen c twee negatieve, dan is er een wortel tusschen L en U en een tusschen L en V; de beide andere kunnen nergens anders dan op den tak, die door M gaat, gelegen zijn. Dit is de verbinding k. Zijn eindelijk alle negatief, dan is nergens op de x-as een wortel te vinden, en de verbinding l heeft plaats. Hieruit ziet men tevens, dat er nog twee punten R en S op de door M gaande tak moeten liggen, waar $\gamma = X_2$ is.

Een blik op de figuur is nu voldoende om te doen zien, dat, als een der uitdrukkingen (c) verdwijnt, de toestanden v, w en x zich zullen voordoen, naarmate de overblijvende beide positief, verschillend van teeken, of beide negatief zijn. Mocht $k = 0$ zijn, dan zouden de beide eerste uitdrukkingen (c) tegelijk kunnen verdwijnen en de verbindingstoestand x' zou optreden. R en S zouden dan in M, V en U in L samenvallen.

24. In het geval B II α vindt in het algemeen de verbinding fig. 11 m plaats Is $\delta = 0$, dan doet zich een van de drie verbindingen n, o of p voor.

De eerste en laatste der drie uitdrukkingen (c) zijn hier natuurlijk aan elkander gelijk. Zijn de beide eerste positief, dan heeft de verbinding o plaats. Hebben zij verschillende teekens, dan is het de verbinding n, en zijn beide negatief de verbinding p die zich voordoet. De verbinding y komt

voor, als de tweede en de verbinding z als de eerste dezer uitdrukkingen verdwijnt. Dit alles ziet men onmiddelijk, als men dit geval beschouwt als een grensgeval van het vorige, en opmerkt, dat de punten T en U van fig. 5 met elkaar en V en W met K en M samenvallen.

In het geval $\mathrm{B}\,\mathrm{II}\,\beta$ heeft men natuurlijk de verbinding q als γ van X_1 of δ van nul verschilt, en als $\delta = 0$ en $\gamma - X_1 = 0$ is, vallen al de wortels in een enkel punt samen.

---

25. Beschouwen wij nu het voorgaande weder in het licht van RIEMANN's theorie, en beelden wij dus niet alleen de waarde van z, maar ook die van:

$$w = z^4 + Az^2 + Bz$$

af, en wel op een RIEMANN'sche vlakte met vier bladen.

De vier wortels der vergelijking in het z-vlak noemen wij als vroeger A, B, C en D, de drie wortels der afgeleide K, L en M. De overeenkomstige punten in het w-vlak zullen wij door de overeenkomstige kleine letters voorstellen. De punten a, b, c en d vallen boven elkaar in de vier bladen van het w-vlak; de punten k, l en m, zijn de drie vertakkingspunten van dat vlak. Wij brengen de vertakkingsdoorsneden zoo aan, dat zij van de vertakkingspunten in het oneindige loopen, en niet door het inwendige van den driehoek klm gaan.

Laten wij nu het geval, dat de punten k, l en m in eene rechte lijn liggen, vooreerst buiten beschouwing, dan zijn er twee gevallen te onderscheiden. Drie van de bladen van het w-vlak kunnen namelijk alle met het vierde samenhangen, of zij kunnen samenhangen in eene bepaalde volgorde. In het eerste geval zullen wij aannemen, dat a in het blad ligt, dat met de drie andere samenhangt, en dat het eerste noemen, terwijl in k het tweede, in l het derde en in m het vierde met dat eerste verbonden is. In het tweede geval onderstellen wij dat in k het eerste met het derde, in l het

tweede met het derde en in m het eerste met het vierde samenhangt.

Beschouwen wij in het eerste geval de drie rechte lijnen, die ieder door twee van de punten k, l en m gaan. Deze beantwoorden aan drie lijnen van den vorm:

$$sX + tY = \varepsilon$$

in het z-vlak. Gaan wij een daarvan wat nauwkeuriger na, b. v. lm. Laat men een punt van uit het oneindige tot l naderen, dan beschrijft het overeenkomstige punt in het z-vlak eene lijn tot aan L; van l uit kan men in het derde vlak schijnbaar denzelfden weg teruggaan, waardoor in het z-vlak de voortzetting der reeds beschreven lijn ontstaat, maar men kan ook twee andere wegen inslaan, men kan in het derde blad schijnbaar door m heen voortgaan, of in het eerste blad blijven en naar m gaan. In beide gevallen ontstaat in het z-vlak een tak loodrecht op den eersten, die in de eene richting door M gaat, en wordt voortgezet, als men in het vierde blad schijnbaar over l terugkeert. Gaat men daarentegen van m uit in denzelfden zin voort in het eerste of in het vierde blad, dan wordt in het z-vlak de eene of de andere helft beschreven van een tak, die alleen door M gaat. Men herkent hieruit eene verdeelende lijn, zooals die in N°. 8 is gedefinieerd. De drie genoemde rechte lijnen vertegenwoordige ieder een dergelijke lijn; wij hebben dus hier het geval in N°. 15 onder A I beschreven. Merkt men op, dat $X_1\ Y_1$, $X_2\ Y_2$, $X_3\ Y_3$ de respectieve coördinaten zijn van de punten k, l en m, dan ziet men, dat de uitdrukking $I\,.\,P$ den dubbelen inhoud voorstelt van den driehoek klm, waaruit wij besluiten, dat de toestand onveranderd moet blijven, zoolang dit product niet van teeken verandert.

26. Is de samenhang der bladen van het w-vlak die, welke wij in het vorige nummer in de tweede plaats onderstelden, dan kan van de lijnen kl en km nog altijd hetzelfde gezegd worden. Zij beantwoorden nog altijd aan twee verdeelende lijnen in het z-vlak. De derde lijn, lm, bestaat hier echter uit twee niet samenhangende deelen, waarvan

een geheel in het tweede en derde, en een in het eerste en vierde blad ligt, en die ieder aan twee elkaar loodrecht snijdende takken beantwoorden.

Wij hebben hier blijkbaar het geval A II van N⁰. 15 voor ons. Zoowel in dit als in het voorgaande geval laat zich alles, wat omtrent de onderlinge ligging en snijding der verdeelende lijnen gezegd is, onmiddelijk uit de ligging der rechte lijnen in het w-vlak opmaken. Ook de verdeeling van het vlak in acht en twintig en in zestien deelen volgt hieruit onmiddelijk, daar in het eerste geval ieder blad in zeven, in het tweede geval in vier deelen verdeeld wordt, en binnen die deelen geen vertakkingspunten liggen.

27. Zien wij nu hoe deze gevallen in elkaar over kunnen gaan. Denken wij ons, dat in het eerste geval een der punten, b. v. k verschoven wordt, zoodat het op de lijn lm komt te liggen. Er moet dan eene verdeelende lijn zijn, die door al de drie punten K, L en M gaat. In L heeft men, zooals dadelijk te zien is, twee onderling loodrechte takken, een daarvan gaat door K, en zet zich over dat punt voort zonder M te ontmoeten, maar een tweede tak in K loodrecht op den eersten staande gaat door M tot in het oneindige en wordt in M door een vierden tak gesneden. Wij hebben dus hier het geval A III van N⁰. 15. Brengt men het punt k aan de andere zijde van de lijn lm, dan hangt nog wel altijd het eerste blad met de drie andere samen, maar een van de vertakkingsdoorsneden gaat nu door het inwendige van den driehoek. Om dit te verhelpen, verplaatsen wij die vertakkingsdoorsnede, door haar een wenteling van 180⁰ om k te laten maken. Hierbij moet zij echter een der punten l of m, b. v. l passeeren. De helft van het eerste blad, waarin l ligt en de overeenkomstige helft van het tweede blad, zijn nu met elkaar verwisseld, en het is nu niet meer het eerste, maar het tweede blad dat in l met het derde samenhangt. De wijze van samenhang tusschen de bladen is dus nu die geworden, welke wij in N⁰. 24 in de tweede plaats hebben beschreven.

Bij de overgang lagen de punten k, l en m wel, maar de punten K, L en M niet in eene rechte lijn. $I.P$ moet

dus nul geweest zijn en van teeken zijn veranderd, terwijl I niet gelijk aan nul is geweest en niet van teeken veranderd. Dit moet dus met P het geval zijn.

Onderstelt men, dat de betrekkelijke ligging van de X- en Y-as in het w-vlak dezelfde is als die van de x- en y-as in het z-vlak, dan ziet men uit het voorgaande, dat de punten k, l en m in het geval A I in denzelfden zin rondom den driehoek gelegen zijn als de punten K, L en M, in het geval A II daarentegen in tegengestelde zin.

28. Komen de punten k, l en m weer in eene rechte lijn te liggen, door dat k wederom de lijn $l\,m$ passeert, dan komt natuurlijk de eerste toestand weer terug, maar gaat nu een der andere punten, b. v. m zich tusschen k en l plaatsen, dan liggen weer de drie punten K, L en M op dezelfde verdeelende lijn, maar toch is de toestand nu eene gansch andere dan in het geval van N^0. 26. In L heeft men nu twee onderling loodrechte takken. Een daarvan gaat als eene doorloopende lijn over K naar M, want men kan van l naar k in het tweede blad, en vandaar terug in het eerste blad naar m gaan. De doorloopende tak, die nu al de wortels K, L en M van de afgeleide bevat, moet noodzakelijk recht zijn, en wordt in K en M even als in L door een anderen tak gesneden. Wij herkennen hierin het geval B I. Wij zien dan ook, dat het nu de factor I is die gelijk aan nul wordt. Komt het punt m nu aan de andere zijde van de lijn $k\,l$ te liggen, dan is de samenhang der bladen niet veranderd, ook niet nadat de door m gaande vertakkingsdoorsnede 180^0 is omgewenteld; dit kan namelijk over l geschieden, en dit punt ligt niet in een der bladen, waartusschen eene verwisseling plaats heeft.

29. Zoowel bij het eerste als bij het tweede overgangsgeval kan het gebeuren, dat twee van de punten k, l en m samenvallen. Als in het tweede geval k een van die punten is, ontstaat daardoor volkomen dezelfde toestand, die dus naar willekeur kan worden opgevat als uit het eene of uit het andere overgangsgeval ontstaan te zijn. Daar echter in een van die gevallen I en in het andere P steeds gelijk aan nul is, moeten in het hier beschouwde geval, waaraan

een samenvallen van twee der punten K, L en M beantwoordt, beide die grootheden verdwijnen. Door het samenvallen van twee der punten b. v. k en m ontstaat een vertakkingspunt, waar drie bladen samenhangen, en men zal gemakkelijk de figuur 10 op het z-vlak terugvinden.

In het geval B I kunnen echter ook de punten l en m samenvallen; dit samenvallen is evenwel slechts schijnbaar, en beantwoordt niet aan een samenvallen van twee punten in het z-vlak. Denkt men zich dan in het w-vlak eene door k gaande rechte lijn uitsluitend gelegen in het eerste en tweede blad en daar in het verlengde van lk tot in het oneindige loopend, dan is het vierbladige w-vlak daardoor in twee gelijk en gelijkvormige maar symmetrische helften verdeeld. De overeenkomstige lijn in het z-vlak moet dus eene rechte lijn zijn, die ook het z-vlak in twee symmetrische helften verdeelt, en de twee punten L en M moeten evenver ter weerszijden van K liggen. Elke rechte lijn door de samenvallende punten l en m getrokken vertegenwoordigt eene lijn van den vorm

$$sX + tY = \varepsilon,$$

die door twee wortels van de afgeleide gaat maar geen verdeelende lijn is.

Het geval dat al de drie punten k, l en m samenvallen vereischt geen nadere bespreking.

30. Ligt in het geval A I het punt a en dus ook de punten b, c en d binnen den driehoek klm of in een van de deelen van het vlak aan dien driehoek grenzende, dan kan elk van die wortels met een der punten k, l en m, a met alle drie die punten verbonden worden door eene rechte lijn, die geen vertakkingsdoorsnede ontmoet, waaruit volgt, dat a met ieder van de andere over een der vertakkingspunten heen samenhangt. In het z-vlak bestaat dus de verbinding a fig. 11. Ligt a echter binnen den overstaanden hoek van een van de hoeken des driehoeks b. v. k, dan loopt een van de verbindingslijnen b. v. al over de vertakkingsdoorsnede uit k heen; a is nu over k met b en over m met d verbonden, maar er is geen verbinding

van a met l. De lijn van van b naar l loopende ligt aanvankelijk in het tweede blad, maar gaat in de vertakkingsdoorsnede in het eerste blad over, en komt over l in het derde blad terug naar c, zoodat nu de verbinding $c—b—a—d$ dus de verbinding b (fig. 11) bestaat.

Ligt het punt a op een van de zijden des driehoeks klm b. v. kl dan is a over k en l met b en c verbonden door lijnen in elkaârs verlengde gelegen, en met d door een lijn over m gaande. Er bestaat dus eene verbinding c fig. 11. Is echter a op het verlengde van kl gelegen, dan gaat eene verbindingslijn van a over k naar b; van uit k gaat een lijn over l naar c en een derde gaat direct over m naar d. Op het z-vlak heeft men dus de verbinding d. Valt ten slotte a met een der hoekpunten k b. v. samen, dan ligt ook b in dat punt, en het is de verbinding r die plaats grijpt.

31. Ligt in het tweede geval a binnen den driehoek klm, of in een van de aangrenzende deelen van het vlak, dan komt de volgorde, waarin de wortels verbonden zijn overeen met die van de vlakken waarin zij liggen, en bestaat dus de verbindingswijze b. Ligt het punt binnen den overstaanden hoek van l, dan gaat b. v. de lijn ak over de vertakkingsdoorsnede uit l heen, b is dan over l met c verbonden, c over k met a en a over m met d, dus nog altijd de verbinding b fig. 11. Gaat de verbindingslijn am over de vertakkingsdoorsnede dan vindt men wel eene andere volgorde maar nog steeds de verbinding b. Ligt echter a binnen den overstaanden hoek van k en snijdt b. v. am de vertakkingsdoorsnede dan is b over k met a, over l met c en over m met d verbonden, en doet zich dus de verbinding a voor.

Komt a op de zijde lm of haar verlengde te liggen, dan is dit voor de verbindingstoestand niets bijzonders, wel echter als a op een der andere zijde b. v. kl ligt. Er gaat dan een doorloopende Φ-lijn van A over K, B en L naar C, terwijl een andere verbindingslijn over M naar D gaat. Ligt a op het verlengde van kl, dan gaat eene verbinding van b en c over l en van l over k naar a, en van a over

m naar *d*. Is eindelijk *a* op het verlengde van *l k* gelegen, dan is er eene verbinding van *a* met *b* over *k* en van *k* over *l* met *c*, terwijl *a* over *m* met *d* is verbonden. Men herkent hier de verbindingen *f*, *e* en *d*.

Valt *a* in *k*, dan vallen *a* en *b* samen, en het is de verbinding *r* die plaats heeft. Komt *a* in *l* of *m* te liggen, dan treedt de verbinding *s* op *).

32. Het overgangsgeval A III denken wij ons uit het geval A I ontstaan, en dus de vertakkingsdoorsnede zoo gelegd, dat het eerste vlak met ieder der drie andere samenhangt. Ligt *a* aan de zijde van de lijn *k l m*, waar de vertakkingsdoorsnede uit *k* niet valt, dan snijdt geen der verbindingslijnen een vertakkingsdoorsnede, en de verbinding *a* fig. 11 heeft plaats. Ligt echter het punt aan de andere zijde, dan moet een der drie lijnen, b. v. *al* de vertakkingsdoorsnede ontmoeten, *a* is dan nog wel met *b* en met *d*, maar niet meer met *c* verbonden, daarentegen bestaat er eene verbinding tusschen *b* en *c*. Nu is er dus de verbinding *b*. Neemt men *a* tusschen *m* en *l*, dan zal men gemakkelijk de verbinding *k*, neemt men het op het verlengde van *l m* of van *m l* even gemakkelijk de verbinding *g* herkennen. Ligt *a* in *k*, dan treedt de verbinding *t*, ligt het in *l* of *m*, dan treedt de verbinding *u* op.

In het tweede overgangsgeval B I ziet men op dezelfde wijze redeneerende, dat, zoolang het punt *a* buiten de lijn *k m l* ligt, altijd de verbinding *b* zich voordoet. De vier overgangsgevallen *i*, *j*, *k* en *l* vindt men terug als het pun *a* respectievelijk genomen wordt tusschen *k* en *m*, op het verlengde van *l k*, tusschen *l* en *m*, en op het verlengde van *k l*.

Valt het punt *a* in *k*, dan bestaat de verbinding *v*, valt het in *m*, dan heeft men de verbinding *w* en als het in *l* valt de verbinding *x*.

---

*) Zoowel in dit als in het voorgaande geval, beantwoordt het bijzondere geval, dat wij vroeger beschouwden, en waarop onze figuren betrekking hebben, aan het geval dat de driehoek *k l m* gelijkzijdig is.

Valt l met m samen, en komt ook het punt a in dat punt te liggen, dan heeft men de verbinding x'.

Vallen b. v. k en m samen, dan hebben wij met het geval B II α te doen. Ligt het punt a ergens in het w-vlak, dan zijn a, b en c met het punt k verbonden door lijnen, waaraan in het z-vlak drie elkaar onder hoeken van 120° ontmoetende Φ-lijnen beantwoorden, en a is over m met vereenigd. Dit is de verbinding m. Mocht het punt op de lijn $k\,l$ liggen, dan heeft een van de drie verbindingen n, o of p plaats, en wel n als het tusschen l en k, o als het op het verlengde van $l\,k$, en p als het op het verlengde van $k\,l$ ligt. Ligt a in l, dan bestaat de verbinding y, en ligt het in k, dan heeft men de verbinding z.

Vallen eindelijk al de drie punten k, l en m samen, dan doet zich het geval B II β voor. Waar a ook ligt, altijd bestaat de verbinding q, tenzij het in k mocht vallen, als wanneer al de vier wortels in een punt samenvallen.

33. De drie uitdrukkingen (a), in N°. 19 voorkomende, zijn niets anders dan de dubbele inhouden der driehoeken $a\,l\,m$, $a\,m\,k$ en $a\,k\,l$, in het geval A I zoo genomen, dat zij positief zijn, als het punt a binnen den driehoek $k\,l\,m$ ligt, en in het geval A II zoo, dat zij in dat geval negatief zijn. Hieruit volgen dadelijk de algebraïsche kenmerken, zooals zij in N°. 19 en 20 zijn opgegeven.

In het geval A III stelt (a') van N°. 21 den afstand voor van het punt a tot aan de lijn $l\,k\,m$, zooals daaruit blijkt, dat de factoren, waardoor de drie uitdrukkingen (a) gedeeld zijn, afgezien van het teeken, de lengten $l\,m$, $k\,m$ en $k\,l$ zijn.

Denkt men zich in dit geval loodlijnen getrokken op de lijn $l\,k\,m$ in de punten k, l en m, dan stellen de drie uitdrukkingen (b) in N°. 21 de afstanden voor van die loodlijnen tot het punt a. In het geval B I en in de beide volgende hebben de uitdrukkingen (c) van N°. 22 dezelfde beteekenis. Ook voor deze gevallen vindt men hieruit de in N°. 21, 22 en 23 gegeven kenmerken terug.

Ten slotte zullen wij nog doen zien, hoe men door deze beschouwingen de vier laatste vergelijkingen (10) zonder berekening uit de beide eerste kan afleiden.

Door de substitutie:

$$z = z' e^{\mu_1}$$

verandert men het coördinatenstelsel in het z-vlak zoodanig, dat de negatieve richting der x-as voortaan in plaats van door K door L gaat. Op het w-vlak ondergaat de figuur hierdoor geene verandering, maar de term met z'^4 in de vergelijking, die uit (3) ontstaat, heeft nu den coëfficiënt $e^{4\mu_1}$. Om aan dien term weer de eenheid tot coëfficiënt te geven, moet men de vergelijking met $e^{-4\mu_1}$ vermenigvuldigen, of, wat op hetzelfde neerkomt, de figuur in het w-vlak een wenteling van $4\mu_1$ om den oorsprong doen ondergaan. Voorziet men de waarden van X en Y in den nieuwen stand van accenten, dan heeft men hierdoor

$$X_1 = X_1' \cos 4\mu_1 - Y_1' \sin 4\mu_1, \quad Y_1 = X_1' \cos 4\mu_1 + Y_1' \sin 4\mu_1$$

en evenzoo voor X_2, X_3, Y_2 en Y_3.

Het is echter duidelijk dat nu

$$X_1' - X_3' = {}^2/_3 p_1 b^3 \cos 3\omega_1, \qquad Y_1' - Y_3' = {}^2/_3 p_1 b^3 \sin 3\omega_1,$$

en dit substitueerende heeft men

$$X_1 - X_3 = {}^2/_3 p_1 b^3 \cos (3\omega_1 + 4\mu_1),$$
$$Y_1 - Y_3 = {}^2/_3 p_1 b^3 \sin (3\omega_1 + 4\mu_1);$$

evenzoo voor de beide andere vergelijkingen.

Dezelfde redeneering is natuurlijk ook van toepassing op de vergelijkingen (22) en andere dergelijke stelsels.

Verandert, zooals bij de vergelijkingen (22) het eerste lid door een wenteling van het coördinatenstelsel in het w-vlak niet, dan zijn de drie vergelijkingen symmetrisch ten opzichte van de drie wortels der afgeleide vergelijking.

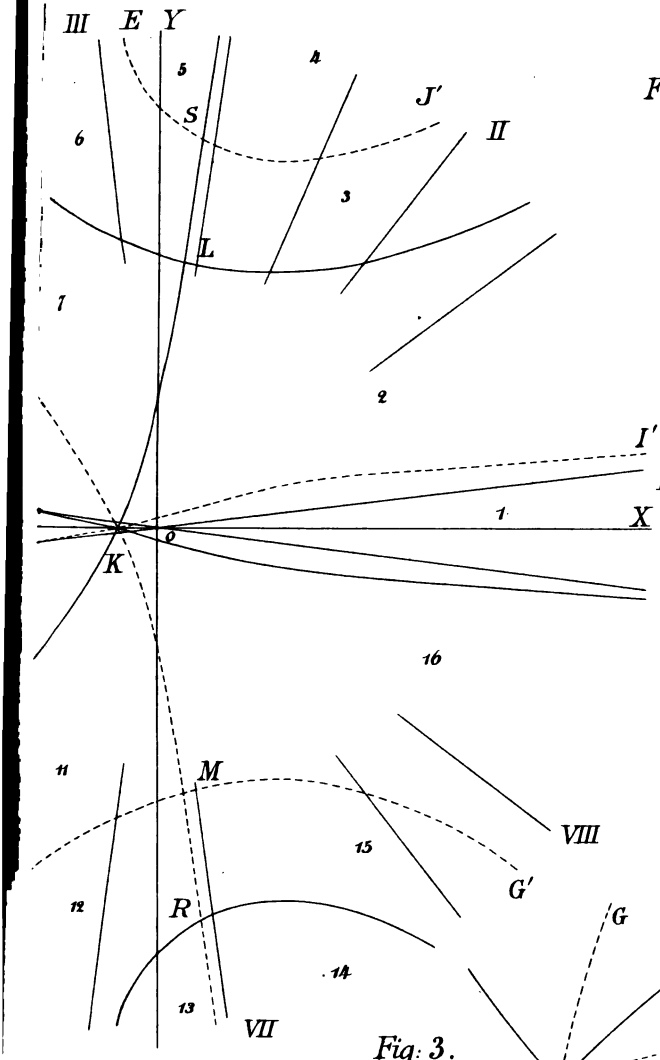


Fig: 10.

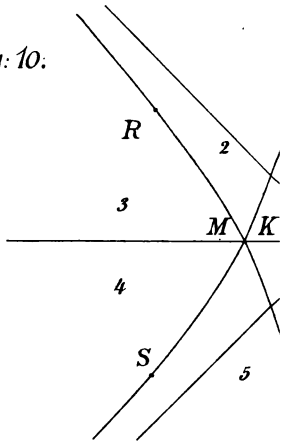


Fig: 5.

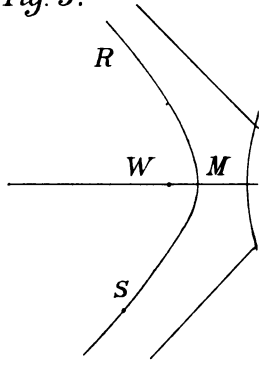


Fig: 2.

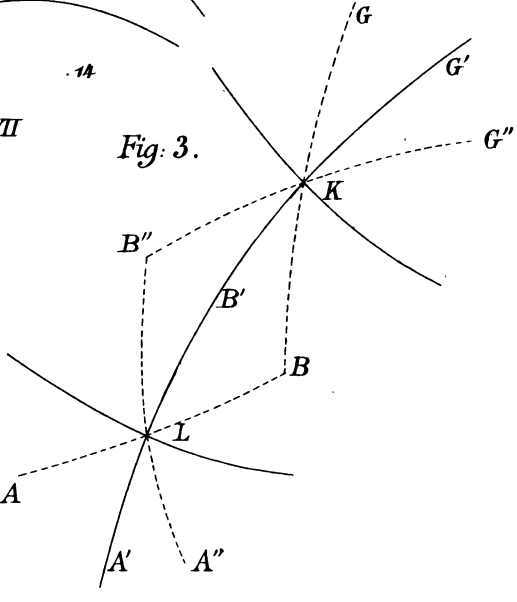


Fig: 3.

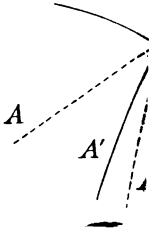


Fig. 6.

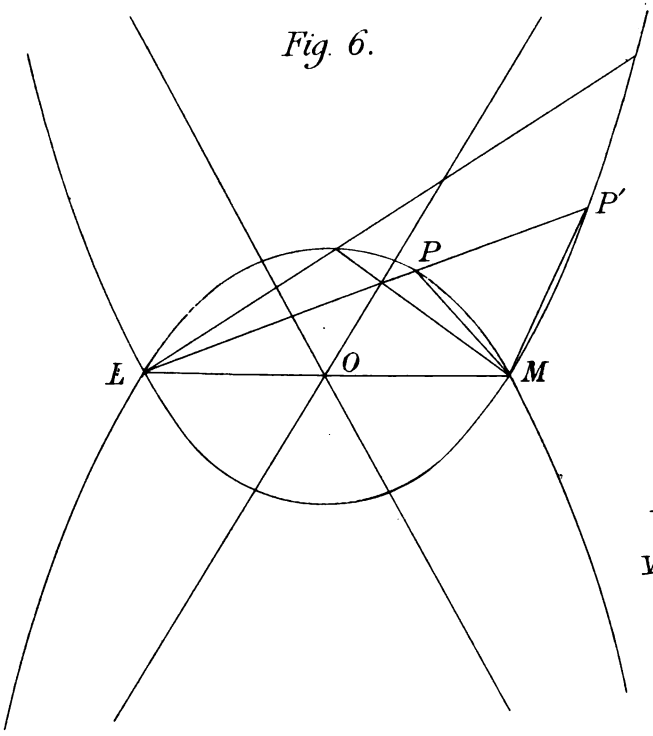


Fig. 9.

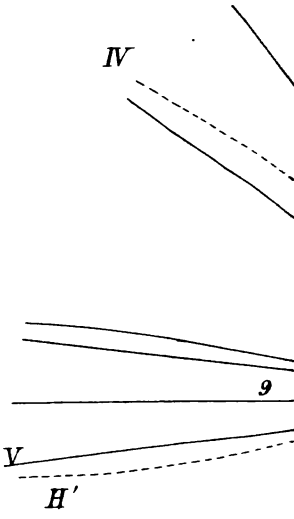


Fig. 7.

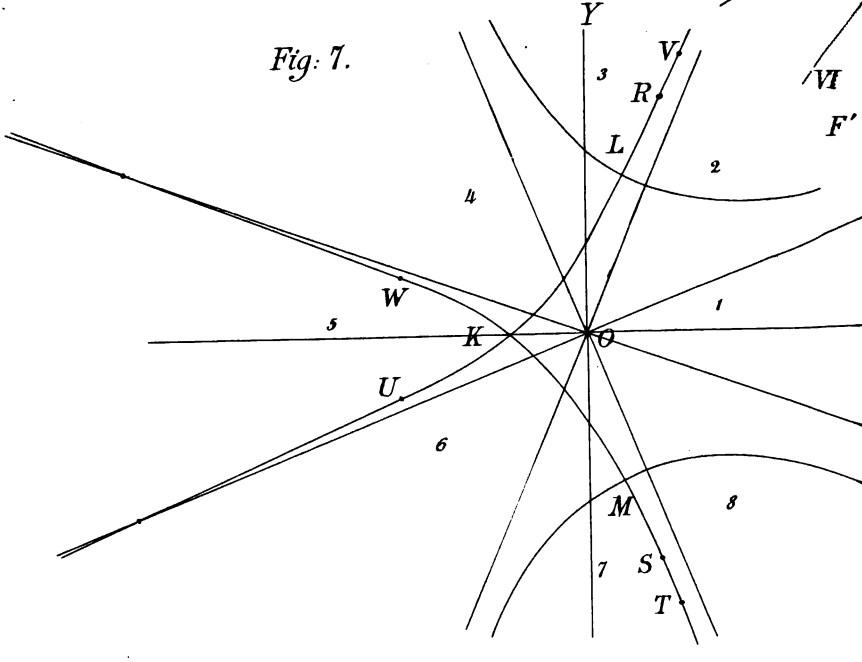


Fig. 8.

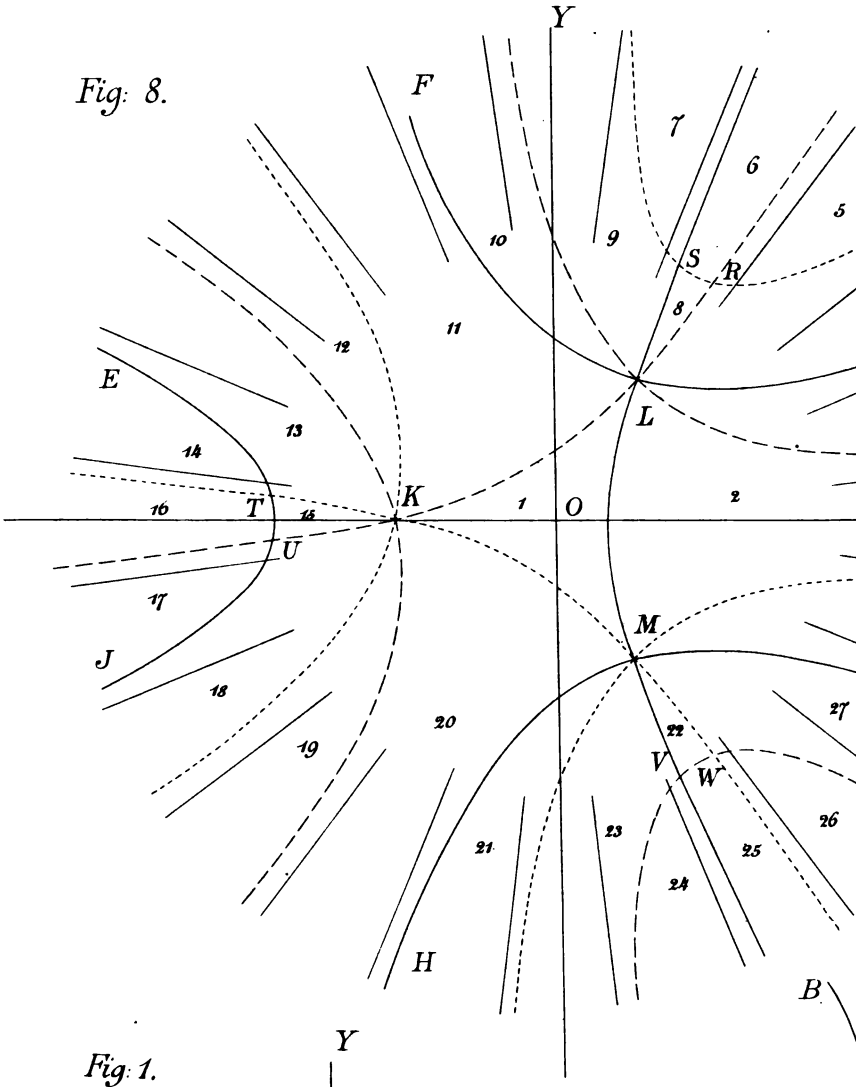
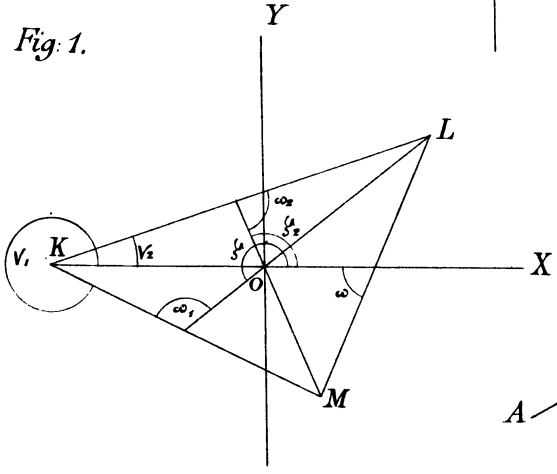
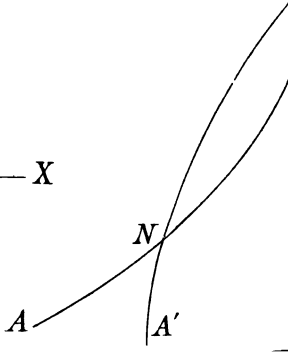

Y
F
7
6
5
10
9
S
R
8
11
12
E
L
13
14
K
1
O
2
16
T
15
U
17
M
J
18
20
22
27
19
V
W
26
21
23
25
24
H
B

Fig. 1.


Y
L
K
V₁
V₂
X
O
M


N
A
A'

k

I

L

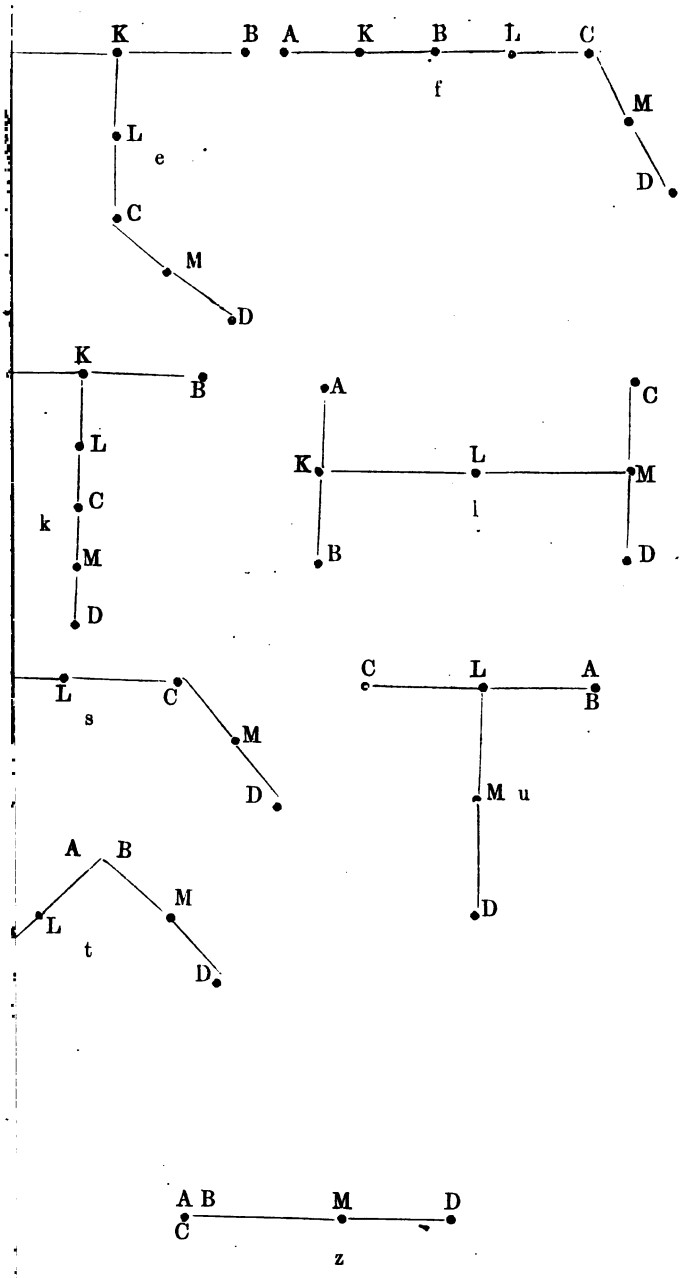

K B A K B L C
f
M
L
e
D
C
M
D
K
B
A
C
L
K
L
M
C
l
k
M
B
D
D
L
C
s
M
D
C L A
B
M u
D
A B
M
L
t
D
A B M D
C
z

Fig. 11.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKWERKEN

DOOR DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

ONTVANGEN EN AANGEKOCHT.

1884—1885.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND APRIL 1884.

NEDERLAND.

Bouwkundig Tijdschrift, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1881—1883. Deel I—III. 4⁰.

Afbeeldingen van oude bestaande gebouwen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1882—1883. Afl. 24—25. Plano.

Nederlandsch Onderwijzers-Genootschap. Tienjarig Paedagogisch Verslag aangaande den toestand van het lager onderwijs in Nederland. 1873—1883. Amsterdam 1884. 8⁰.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences. Harlem 1883—1884. Tome XVIII. Livr. 5. Tome XIX. Livr. 1. 8⁰.

J. W. Moll. Le potétomètre, appareil servant à mesurer l'aspiration de l'eau par les plantes. 8⁰.
(Extrait des Archives Néerlandaises, Tome XVIII.)

R. D. M. Verbeek. Rapport sommaire sur l'éruption de Krakatau les 26, 27 et 28 Août 1883. 8⁰.
(Extrait des Archives Néerlandaises, Tome XIX).

Tijdschrift, uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1884. 4e Reeks. Deel VIII. N⁰. 2—3. 8⁰.

Gedenkschrift bij het twaalf- en een half-jarig bestaan van het Koloniaal Museum op het Paviljoen te Haarlem door F. W. van Eeden. Haarlem 1884. 8⁰.

Benedictus de Spinoza, »Stelkonstige reeckening van den regenboog" and »Reeckening van kanssen", two nearly unkwown treatises. Reimpression by Dr. D. Bierens de Haan. Leiden 1884. 4⁰.

Sammlungen des Geologischen Reichs-Museums in Leiden. I. Beiträge zur Geologie Ost-Asiens und Australiens, herausgegeben van K. Martin und A. Wichmann. Leiden 1884. Band II. Heft 2. 8⁰.

Berichten en Mededeelingen der Vereeniging voor lijkverbranding te 's Gravenhage. 1884. N⁰. 1. 8⁰.

Catalogus op de Bibliotheek der Vereeniging voor lijkverbranding. 's Gravenhage 1884. 8⁰.

Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid. Verslag over de waarnemingen in de Noordzee omtrent de stroomen langs de Nederlandsche kust in de jaren 1880—1882 door H. Bernelot Moens en R. P. J. Tutein Nolthenius. 's Gravenhage 1884. 4°.

Société historique et archéologique dans le duché de Limbourg. Répertoire alphabétique des mémoires etc. dans les vingt premiers volumes des publications de la Société. 1863—1883. Maestricht 1884. 4°.

Statistiek van het Koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Februari 1884. 's Gravenhage 1884. Nieuwe Serie. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren waargenomen in de maanden Augustus en September 1883. 's Gravenhage 1883. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden Augustus en September 1883. 's Gravenhage 1883. fol

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Geneeskundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1884. Nieuwe Serie. Deel XII. Afl. 6. 8°.

Javasche Courant van 7 Maart 1884. N°. 19. (Hierin: Kort verslag over de uitbarsting van Krakatau op 26, 27 en 28 Augustus 1883).

C. Ph. Sluiter. Ueber einen in Ascidien schmarotzenden Wurzelkrebs. Batavia 1884. 8⁰.
(Separat-Abdrück aus: Natuurk. tijdschrift voor Ned. Indië. Band XLIII).

——————— Beiträge zu der Kenntniss der Gephyreen aus dem Malayischen Archipel. Batavia 1883. 8⁰.
(Separat-Abdrück aus: Natuurk. tijdschrift voor Ned. Indië. Band XLIII).

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1884. 3e Série. Tome VII. N⁰. 2—3. 8⁰.

Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique Bruxelles 1883. Tome II. N⁰. 3. 8⁰.

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen, uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1884. 2de Jaarg. Afl. 4. 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1884. Tome XCVIII. N⁰. 11—14. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1884. 2e Série. Tome XIII. N⁰. 13—16. 8⁰.

Journal d'hygiène. Paris 1884. 10e Année. Vol. IX. N⁰. 393, 395. 4⁰.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1884. Livr. 318—320. roy. 8⁰.

Mission scientifique au Mexique et dans l'Amérique Centrale. Recherches zoologiques. 3e Partie. Etudes sur les batraciens par M. M. A. Duméril et Bocourt. Paris 1883. Livr. 9. 4⁰.

Collection de documents inédits sur l'histoire de France.

a. Lettres du Cardinal Mazarin pendant son ministère, recueillies et publiées par M. A. Chéruel. Paris 1883. Tome III. 4⁰.

b. Lettres de Jean Chapelain, publiées par Ph. Tamizey de Larroque. Paris 1883. Tome II. 4⁰.

c. Inscriptions de la France du Ve siècle au XVIIIe recueillies et publiées par F. de Guilhermy et R. De Lasteyrie. Paris 1883. Tome V. 4⁰.

Journal de l'Ecole polytechnique. Paris 1883. Cahier 53. 4⁰.

Inhoud:

H. Résal. Solution de quelques questions se rapportant aux ponts suspendus.

——— Développements sur un point de la théorie de la rotation des corps solides.

J. Moutier. Sur la loi de Dulong et Petit.

H. Léauté. Sur une famille de courbes que l'on rencontre dans les transmissions de mouvement et sur leur application dans les machines.

Picquet. Quelques développements sur les équations différentielles linéaires à coëfficients constants et sur la théorie des fractions rationnelles.

L. Lecornu. Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères.

A. Cornu. Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des raies D.

Ch. Brisse. Exposition analytique de la théorie des surfaces.

Nouvelles archives du Muséum d'histoire naturelle. Paris 1883. 2e Série. Tome VI. Fasc. 1. 4⁰.

Inhoud:

A. Franchet. Plantae Davidianae ex Sinarum imperio.
Ed. Perrier. Mémoire sur les étoiles de mer recueillies dans la mer des Antilles et le golfe du Mexique.

Archives de médecine et de pharmacie militaires publiées par ordre du Ministre de la guerre. Paris 1883. 2 Vol. 8⁰.

Catalogue de la Bibliothèque du dépot de la guerre. Paris 1883. Tome I. 8⁰.

Bulletin de la Société zoologique de France pour l'année 1883. Paris 1883. Partie 4—6. 8⁰.

Annales de la Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. Paris-Lyon 1883. 5e Série. Tome V. 8⁰.

Annales du Musée Guimet. Paris-Lyon 1884. Tome VI. 4⁰.

Inhoud:

Ph. Ed. Foucaux. Le latite vistara (développement des jeux) contenant l'histoire du Bouddha Cakya-Mouni depuis sa naissance jusqu'à sa prédication.

Revue de l'histoire des religions. Paris-Lyon 1883. 4e Année. Tome VII. N⁰. 2—3. Tome VIII. N⁰. 4—5. 8⁰.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy. Paris 1883. 2e Série. Tome VI. Fasc. 15. 8⁰.

Actes de l'Académie nationale des sciences, belles-lettres et arts de Bordeaux. 1881. 3e Série. Année 43. Trimestre 1—4. 8⁰.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Paris-Bordeaux 1883. 2e Série. Tome V. 3e Cahier. 8°.

Commission météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1882 à Mai 1883. Bordeaux 1883. 8°.

Recueil de l'Académie de législation de Toulouse. Paris-Toulouse 1882—1883. Tome XXXI. 8°.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. 1883. 8e Série. Tome V. 8°.

Annuaire de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse, pour l'année 1883—1884. Année 39. 12°.

Bulletin de la Société Académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse. 1883. Tome IV. N°. 2—4. 8°.

Société Académique Franco-Hispano-Portugaise. Statuts et règlements. Toulouse 1883. 8°.

Bulletin de la Société Académique de Brest. 2e Série. Tome VIII. 8°.

Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen. 1883. 8°.

Bulletin historique de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1883. Nouvelle Série. Livr. 127—128. 8°.

Tables des bulletins et mémoires publiés par la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1883. 8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique de la Société d'agriculture, sciences et arts de Valenciennes. 1884. Tome XXXVII. N⁰. 1 - 3. 8⁰.

Revue de botanique. Bulletin mensuel de la Société Francaise de botanique. Auch 1883. Tome II. N⁰. 13 - 22. 8⁰.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1884. Vol. XLIV. N⁰. 5. 8⁰.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1884. 2d Series. Vol. IV. Part 8⁰.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1884. New Series. Vol. VI. N⁰. 4. 8⁰.

R. Grant. Catalogue of 6415 stars, for the epoch 1870, deduced from observations made at the Glasgow University Observatory during the years 1860 to 1881. Glasgow 1883. 4⁰.

OOSTENRIJK.

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1883. Jahrg. 33. 8⁰.

Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1883. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Band XLV—XLVI. 4⁰.

Inhoud, Band XLV:

Steindachner. Beiträge zur Kenntniss der Fische Afrika's und Beschreibung einer neuen Paraphoxinus-Art aus der Herzegowina.

ROHON. Untersuchungen über Amphioxus lanceolatus.

TANGL. Die Kern- und Zelltheilungen bei der Bildung des Pollens von Hemerocallis fulva L.

HALLER. Zur Kenntniss der Muriciden. I. Theil. Anatomie des Nervensystems.

BURGERSTEIN. Geologische Studie über die Therme von Deutsch-Altenburg an der Donau.

BECHER. Zur Kenntniss der Mundtheile der Dipteren.

DUNIKOWSKI. Die Spongien, Radiolarien und Foraminiferen der unterliassischen Schichten vom Schafberg bei Salzburg.

BASSANI. Descrizione du pesci fossili di Lesina accompagnata da appunti su alcune altre ittiofaune cretacee.

SCHRAM. Hilfstafeln für Chronologie.

BÖHM. Ueber einige tertiäre Fossilien von der Insel Madura, nördlich von Java.

IGEL. Ueber eine Classe von Abel'schen Gleichungen.

Band XLVI:

STEINDACHNER. Beiträge zur Kenntniss der Flussfische Südamerika's. IV.

OPPOLZER. Ermittlung der Störungswerthe in den Coordinaten durch die Variation entsprechend gewählter Constanten.

RATHAY. Untersuchungen über die Spermogonien der Rostpilze.

REHOROVSKY. Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln und der Coefficienten-Combinationen vom Gewichte eilf und zwölf.

ESCHERICH. Ueber die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen.

KANTOR. Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen bei Coïncidenz gleichartiger Träger und successiver Anwendung der Transformation.

UHLIG. Die Cephalopodenfauna der Wernsdorfer Schichten.

GEGENBAUER. Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges.

BITTNER. Neue Beiträge zur Kenntniss der Brachyuren-Fauna des Alttertiärs von Vicenza und Verona.

HERZ und STROBL. Reduction des Auwers'schen Fundamental-Cataloges auf die Le Verrier'schen Praecessionscoëfficienten.

IGEL. Ueber ein Princip zur Erzeugung von Covarianten.

STACHE. Fragmente einer Afrikanischen Kohlenkalkfauna aus dem Gebiete der West-Sahara.

Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1882—1883. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 1ste Abth. Band LXXXVI. Heft 1—5. Band LXXXVII. Heft 1—5. 2te Abth. Band LXXXVI. Heft 2—5. Band LXXXVII. Heft 1—5. 3te Abth. Band LXXXVI. Heft 3—5. Band LXXXVII. Heft 1—3. 8⁰.

Denkschriften der Kais. Akademie der Wisschenschaften. Wien 1883. Philosophisch-historische Classe. Band XXXIII. 4⁰.

Inhoud:

Höfler. Zur Kritik und Quellenkunde der ersten Regierungsjahre K. Karls V. 3te Abtheilung.
Karabacek. Der Papyrusfund von El-Fayum.
Mordtmann und Müller. Sabäische Denkmäler.

Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1882—1883. Philosophisch-historische Classe. Band CI. Heft 2. Band CII. Heft 1—2. Band CIII. Heft 1—2. 8⁰.

Register zu den Bänden 91 bis 100 der Sitzungsberichte der Philosophisch-historischen Classe der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1883. N⁰. X. 8⁰.

Archiv für Oesterreichische Geschichte, herausgegeben von der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1882. Band LXIV. 2te Hälfte. 8⁰.

Jahrbuch der Kais. Kön. Geologischen Reichsanstalt. Wien 1883. Band XXXIII. N⁰. 4. Band XXXIV. N⁰. 1. 4⁰.

Verhandlungen des Naturforschenden Vereins. Brünn 1883. Band XXI. Heft 1—2. 8⁰.

DUITSCHLAND.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1884. Band XCV. Heft 3. 8⁰.

Jahrbuch der Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer. Emden 1883. Band V. Heft 2. 8⁰.

Neues Lausitzisches Magazin, herausgegeben von der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1883. Band LIX. 8⁰.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1883. Jahrg. 18. Heft 4. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1884. Jahrg. 7. N⁰. 164—165. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt Gotha 1884 Band XXX. N⁰. 3. 4⁰.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des Naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1883. 4ᵗᵉ Folge. Band II. Heft 6. 8⁰.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Güstrow 1883. Jahr 37. 8⁰.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie des Wissenschaften. München 1884. Jahrg. 1883. Heft 3. 8⁰.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1884. Jahrg. 1883. Heft 4. 8⁰.

XL—XLII. Jahresbericht der Pollichia, eines Naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1884. 4⁰.

LUXEMBURG.

Publications de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg (Section des sciences naturelles et mathématiques). Luxembourg 1883. Tome XIX. roy. 8⁰.

ZWITSERLAND.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1882. Heft 2. Jahre 1883. Heft 1. Bern 1883. 8⁰.

Neue Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Basel 1883. Band XXVIII. Abth. 3. 4⁰.

Inhoud:

C. Keller. Die Fauna im Suez-Kanal und die Diffusion der mediterranen und erythräischen Thierwelt.

ITALIË.

Atti della R Accademia dei Lincei. Roma 1884. Serie 3. Transunti. Vol. VIII. Fasc. 7—9. 4⁰.

Wagner. Estratto da un lavoro inedito di V. Fiorentino. Napoli (1883). 8⁰.

Atti della Societa Toscana di science naturali. Processi Verbali del 13 Gennaio 1884. 8⁰.

PORTUGAL.

Boletim da Sociedade de geographia. Lisboa 1883. 4ª Serie. N⁰. 4—5. 8⁰.

DENEMARKEN.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie, udgivne af det Kong. Nordiske Oldskrift Selskab. Kjobenhavn 1883. Hefte 2—4. Tillaeg til aargang 1882. 8⁰.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences. St. Pétersbourg 1883. 7e Série. Tome XXXI. N⁰. 5—8. 4⁰.

Inhoud:

5. Fr. Schmidt. Die Crustaceenfauna der Eurypterenschichten von Rootziküll auf Oesel.
6—7. W. Kipryanow. Studien über die fossilen Reptilien Russlands. III Theil. Gruppe Thaumatosauria N. IV Theil. Ordnung Crocodilina Oppel.
8. J. Baranetzki. Die Kreisförmige Nutation und das Winden der Stengel.

Verslagen van het Keiz. Geographisch Genootschap. St. Petersburg 1883. Deel XIX. N⁰. 5. 8⁰.

Annalen des Physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1883. Jahrg. 1882. Theil I. 4⁰.

Bulletin de la Société impériale des naturalistes. Moscou 1883. Année 1883. N⁰. 2. 8⁰.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. 1883. N⁰. 26. 8⁰.

AZIË

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Yokohama 1884. Heft 30. 4⁰.

Abhandlungen des Tokio Daigaku (Universität zu Tokio). 1883. N⁰. 10. 4⁰.

Inhoud:

J. F. Eykman. Phytochemische Notizen ueber einige Japanische Pflanzen.

Transactions of the Seismological Society of Japan. Tokio 1883. Vol. VI. 8⁰.

AMERIKA.

12th Annual Report of the U. S. geological and geographical survey of the territories for the year 1878. Washington 1883. 3 Vol. 8⁰.

2d Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior 1880—1881. Washington 1882. roy. 8⁰.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. Washington 1883. N⁰. 1. 8⁰.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Washington 1882. Vol. II. 4⁰. with Atlas. Plano.

Inhoud:

Cl. E. Dutton. Tertiary history of the Grand Canon district.

47th Congress. Congressional directory, compiled for the use of congress by B. Perley Poore. Washington 1882—1883. 1st and 2d Edition. 8⁰.

Annual Report of the comptroller of the currency to the second session of the fortyseventh congress of the United States. Washington 1882. 8⁰.

Astronomical and meteorological observations made during the years 1875 and 1879 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1873—1883. 2 Vol. 4⁰.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston 1883. New Series. Vol. X. 8⁰.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Boston 1883. Vol. III. N⁰. 6—7. 8⁰.

Inhoud:

6. J. A. Kingsley and H. W. Conn. Some observations on the embryologie of the teleosts.
7. S. H. Scudder. The carboniferous hexapod insects of Great Britain.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Boston 1883. Vol. XXI. Part 4. Vol. XXII. Part 1. 8⁰.

Proceedings of the Academy of natural sciences. Philadelphia 1884. Year 1883. Part 3. 8⁰.

Transactions of the American Philosophical Society. Philadelphia 1883. New Series. Vol. XVI. Part 1. 4⁰.

Inhoud:

E. Y Mc. Gauley. Dictionary of Egyptian hieroglyphics.

Proceedings of the American Philosophical Society. Philadelphia 1883. Vol. XX. N⁰. 113. 8⁰.

55th Annual Report of the board of managers of the house of refuge. Philadelphia 1883. 8⁰.

The journal of prison discipline and philanthropy. Philadelphia 1883. New Series. N⁰. 22. 8⁰.

The annual reports of the board of directors of the Pennsylvania Institution for the deaf and dumb for the years 1881 and 1882. Philadelphia 1882—1883. 8⁰.

Science. Cambridge 1884. Vol. III. N⁰. 58 - 61. 4⁰.

John Hopkins University Circulars. Baltimore 1884. Vol. III. N⁰. 29. 4⁰.

John Hopkins University. Studies from the biological laboratory, edited by Newell Martin. Baltimore 1884. Vol. N⁰. 1. 8⁰.

Journal of the American Medical Association. Chicago 1884. Vol. II. N⁰. 11—14. 4⁰.

Transactions of the New-York Academy of sciences. New-York 1882—1883. Vol. II. N⁰. 1—8. 8⁰.

Annals of the New-York Academy of sciences. New-York 1882—1883. Vol. II. N⁰. 11—13. 8⁰.

American journal of science. New Haven 1883—1884. 3d Series. Vol. XXVI. N⁰. 152—156. Vol. XXVII. N⁰. 157, 160. 8⁰.

Proceedings of the Davenport Academy of natural sciences. Davenport, Jowa 1883. Vol. III. Part 3. 8⁰.

Proceedings of the American Association for the advancement of science. Salem 1883. Vol. XXXI. 2 Parts. 8⁰.

Geology of Wisconsin. Survey of 1873—1879. Madison 1882. Vol. I, IV. 8⁰. With Atlas. Plano.

Bulletin of the California Academy of sciences. San Francisco 1884. N⁰. 1. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1884. Tomo IX. N⁰. 13—30. fol.

El Ensayo Medico. Caracas 1884. Ano 1. N⁰. 14—15. 4⁰.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1881. N⁰. 3. 1883. N⁰. 11. 4⁰.

A A N G E K O C H T.

De Navorscher. Amsterdam 1884. Nieuwe Serie. Jaarg. 17. N⁰. 2. 8⁰.

Journal des savants. Paris, Mars 1884. 4⁰.

Annales des sciences naturelles. 6e Série. Botanique. Paris 1884. Tome XVII. N⁰. 3—6. 8⁰.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1883—1884. 2e Série. Tome VII. Décembre. Tome VIII. Février. 8⁰.

Annales de chimie et de physique. Paris 1884. 6e Série. Tome I. Mars. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1884. 5th Series. Vol. XVII. N⁰. 106. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1884. 5th Series. Vol. XIII. N°. 76. 8°.

R. Hoernes und M. Auinger. Die Gasteropoden der Meeres-Ablagerungen der ersten und zweiten miocänen Mediterran-Stufe in der Oesterreichisch-Ungarischen Monarchie. Wien 1884. Lief. 4. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1884. N°. 6—7. Nachrichten. N°. 3—5. 8°.

Berichte der Deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1884. Band II. Heft 2. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1884. Neue Folge. Band XXI. Heft 4. Beiblätter. Band VIII. N°. 3. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1884. Band CCLI. Heft 12—13. Band CCLII. Heft 1—2. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1884. 3e Période. Tome XXI. N°. 63. 8°.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1884. 3e Période. Tome XI. N°. 4. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MEI 1884.

Verslag van den toestand der gemeente Amsterdam gedurende het jaar 1883. Amsterdam 1884. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1884. N°. 1—2. 8°.

Congrès international de médecins des colonies, Amsterdam, Septembre 1883. Compte-rendu publié par M.M. van Leent, Guye, de Perrot et Zeeman. Amsterdam 1884. 8⁰.

Revisio pyrenomycetum in regno Batavorum hucusque detectorum auctore C. A. J. A. Oudemans. Amsterdam 1884. 8⁰.

Tijdschrift, uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1884. 4e Reeks. Deel VIII. N⁰. 4. 8⁰.

Nederlandsch-Chineesch woordenboek met de transcriptie der Chineesche karakters in het Tsiang-Tsiu dialekt, bewerkt door Dr. G. Schlegel. Leiden 1884. Deel III. Afl. 3. roy. 8⁰.

Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch laboratorium der Universiteit te Leiden, uitgegeven door Dr. A. Heynsius. Leiden 1884. Deel VI. 8⁰.

L'Egypte et l'Europe par un ancien juge mixte. Leiden 1884. Tome II. 8⁰.

Jaarboek van de Koninklijke Nederlandsche Zeemacht. 1882—1883. 's Gravenhage 1883. 8⁰.

Mededeelingen betreffende het zeewezen. 's Gravenhage 1884. Deel XXV. Afl. 2. 8⁰.

3de Supplement (1882 en 1883) op den catalogus der Bibliotheek van het Departement van Oorlog. 's Gravenhage 1884. 8⁰.

Studia critica et epicritica in Pindarum scripsit H. van Herwerden. Traiecti ad Rh. 1884. 8⁰.

Verslag der Commissie ter verzekering eener goede bewaring van gedenkstukken van geschiedenis en kunst te Nijmegen, over het jaar 1883. Nijmegen 1884. 8°.

Mededeelingen en berichten der Geldersche Maatschappij van landbouw over 1884. Zutphen 1884. N°. 1. 8°.

Publications de la Société historique et archéologique dans le duché de Limbourg. Ruremonde 1883. Tome XX. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Maart 1884. 's Gravenhage 1884. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand October 1883. 's Gravenhage 1883. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand October 1883. 's Gravenhage 1883. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1884. Deel XXIX. Afl. 2—3. 8°.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1884. Deel XXI. N°. 3—4. 8°.

Verslag omtrent den staat van 's Lands plantentuin te Buitenzorg over het jaar 1882. Batavia 1884. roy. 8⁰.

R. D. M. Verbeek. Kort verslag over de uitbarsting van Krakatau op 26, 27 en 28 Augustus 1883. Batavia 1884. roy. 8⁰.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1884. 3e Série. Tome XVIII. N⁰. 3—4. 8⁰.

Ernest Staas, schetsen en beelden door Tony (Mr. A. Bergmann). Gent 1884. 4e Uitgave. 8⁰. (Uitgave van het Willems-fonds N⁰. 106).

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen, uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1884. 2de Jaarg. Afl. 5. 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1884. Tome XCVIII. N⁰. 15—19. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1884. 2e Série. Tome XIII. N⁰. 17—21. 8⁰.

Comptes rendus des séances et Mémoires de la Société de biologie. Paris 1882. 7e Série. Tome III. 8⁰.

Journal d'hygiène. Paris 1884. 10e Année. Vol. IX. N⁰. 396—400. 4⁰.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les

plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1884. Livr. 321—326. roy. 8⁰.

GROOT BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1884. Vol. XLIV. N⁰. 6. 8⁰.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1884. New Series. Vol. VI. N⁰. 5 8⁰.

Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1884. New Series. Vol. XVI. Part 2. 8⁰.

Journal of the Anthropological Society. London 1884. Vol. XIII. N⁰. 4. 8⁰.

PATRICK GEDDES. A re-statement of the cell-theory with applications to the morphology, classification, and physiology of protists plants and animals. Together with an hypothesis of cell-structure and an hypothesis of contractility. 8⁰.
(Reprinted from the Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XII).

Transactions and proceedings of the Botanical Society. Edinburgh 1884. Vol. XV. Part 1. 8⁰.

Preleminary report of the local scientific societies committee of the British Association for the advancement of science. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Mittheilungen der Anthropologischen Gesellschaft. Wien 1884. Band XIV. Heft 1. 4⁰.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der Kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1884. N⁰. 1—17. roy. 8⁰.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1884. Band XCVI. Heft 1—2. 8⁰.

68ster Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft. Emden 1884. Jahr 1882/3. 8⁰.

Wochenschrift für klassische Philologie, herausgegeben von W. Hirschfelder. Berlin 1884. Jahrg. 1. N⁰. 1—20. 4⁰.

Abhandlungen der Kön. Gesellschaft der Wisschenschaften. Göttingen 1883. Band XXX. 4⁰.

Inhoud:

A. von Könen. Beitrag zur Kenntniss der Placodermen des norddeutschen Oberdevon's.

Ed. Riecke. Zur Lehre von der aperiodischen Dämpfung und zur Galvanometrie.

F. Wüstenfeld. Der Tod des Husein ben'ali und die Rache.

——————— Die Çufiten in Süd-Arabien im XI (XVII) Jahrhundert.

F. Wieseler. Ueber einige beachtenswerthe geschnittene Steine der vierten Jahrhunderts n. Chr. Abth. I. Die Cameen mit Triumphdarstellungen.

Nachrichten von der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1883. Göttingen 1883. 8⁰.

J. Henle. Zur Anatomie der Crystallinse. Göttingen 1878. 4⁰.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des Naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a. S. 1884. 4te Folge. Band III. Heft 1. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1884. Jahrg. 7. N⁰. 166—168. 8⁰.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1884. 2te Reihe. Teil I. Heft 1. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1884. Band XXX. N⁰. 4—5. Ergänzungsheft N⁰. 74. 4⁰.

Die Meteoriten-Kreisreihen als Erzeuger der Kometen, Sonnenflecke, des Erdmagnetismus, des Windes und Regens, des Sonnenlichtes, der Sonnenhize u. s. w. 8⁰.

ZWITSERLAND.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft. Basel 1884. Theil VII. Heft 2. 8⁰.

Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft. Basel 1884. 8⁰. (Anhang zu Theil VII der Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft).

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1884. Serie 3a. Transunti. Vol VIII. Fasc. 10. 4⁰.

Di una bolla plumbea papale del secolo in circa decimo scoperto nel foro Romano. Lettera del comm. G. B. de Rossi al comm. G. Fiorelli. Roma 1882. 4⁰.

G. B. DE ROSSI. Note de topografia Romana raccolte dalla bocca di pomponio leto e testo pomponiano della notitia regionum urbis Romae. Roma 1882. 4⁰.

——————— Note di ruderi e monumenti antichi per la pianta di Gio. Batt. Nolli conservate nell' archivio vaticano. Roma 1884. 8⁰.

——————— D'un tesoro di monete Anglo-Sassoni trovato nell' Atrio delle vestali Roma 1884. 4⁰.

——————— Del luogo appellato ad Capream presso la via nomentana dall'eta arcaica ai primi secoli Christiani. Roma 1884. roy. 8⁰.

Memorie della Reale Accademia delle scienze. Torino 1884. Serie 2ª. Tomo XXXV. 4⁰.

Inhoud:

L. CAMERANO. Ricerche intorno all'anatomia di un feto di Otaria jubata (Forster).
M. LESSONA e C. POLLONERA. Monografia dei limacidi italiani.
A. DORNA. Sulla rifrazione.
N. JADANZA. Alcuni problemi di geodesia.
L. CAMERANO. Monografia degli anfibi anuri italiani
A. COSSA. Notizie sulla vita e sulle opere di Raffaele Piria.
M. LESSONA. Sull'anatomia dei polioftalmi.
A. PORTIS. Nuovi studi sulle traccie attribuite all'uomo pliocenico.
G. SERGI. Polimorfismo e anomalie delle tibie e dei femori degli scheletri etruschi di Bologna.
A. PORTIS. Nuovi chelonii fossile del Piemonte.
J. GUARESCHI. Ricerche sui derivati della naftalina.
L. CAMERANO. Ricerche intorno alla vita branchiale degli anfibi.
C. NANI. Di una nuova copia degli statuti di Amedeo VI dell anno 1379.
A. DUFOUR et F. RABUT. Sigillographie de Savoie. 2e Mémoire. Sceaux religieux.
J. PIZZI. Tishtar-Yasht. L'inno a Tistrya nell' Avesta.
V. PROMIS. Frammento di studi di Carlo Promis sulla storia militare del Piemonte.

V. Promis. Reliquiario armeno gia esistente nel convento del Bosco presso Alessandria in Piemonte.
C. Nani. Di un libro di Matteo Gribaldi Mofa, giureconsulto chierese del secolo XVI.
F. Rossi. Trascrizione di un codice copto del Museo egizio di Torino.
D. Pezzi. La grecita non ionica nelle iscrizioni piu antiche.

Il primo secolo della R. Accademia delle scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783—1883). Torino 1883. 4⁰.

Atti della R. Accademia delle scienze. Torino 1883—1884. Vol. XIX. Disp. 1—2. 8⁰.

Atti della Società Toscana di scienze naturali. Pisa 1884. Memorie. Vol. VI. Fasc. 1. 8⁰.

Atti della Società Toscana di scienze naturali. Processi Verbali del 2 Marzo 1884. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Sveriges geologiska undersökning:
a. Beskrifning till kartbladen Boras, Säro, Svenska Stenarne och Svenska Högarne. 8⁰.
b. Beskrifning till karta öfver Berggrunden inom die malmforande trakterna i norra delen af Orebro län. 4⁰.
c. Afhandlingar och uppsatser. N⁰. 53—60. 8⁰ en 4⁰.

RUSLAND.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences. St. Pétersbourg 1884. Tome XXIX. N⁰. 2. 4⁰.

Verslagen van het Keiz. Geographisch Genootschap. St. Petersburg 1884. Deel XX. N⁰. 1. 8⁰.
(In het Russisch).

Jaarverslag van het Keiz. Geographisch Genootschap over 1883. St. Petersburg 1884. 8⁰.
(In het Russisch).

Jaarverslag van het Openbaar en van het Roumiantzof Museum te Moscou, over 1879—1882. Moscou 1884. 8⁰.
(In het Russisch).

Catalogus der numismatische Afdeeling van het Openbaar en van het Roumiantzof Museum. Moscou 1884. Part 1. 8⁰.
(In het Russisch).

Sitzungsberichte der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst aus dem Jahre 1882. Mitau 1883. 8⁰.

AFRIKA.

Bulletin de la Société Khédiviale de géographie. Le Caire 1884. 2e Série. N⁰. 5. 8⁰.

AMERIKA.

Journal of the American medical association. Chicago 1884. Vol. II. N⁰. 15—19. 4⁰.

Science. Cambridge 1884. Vol. III. N⁰. 62—66. 8⁰.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1884. Vol. III. N⁰. 30. 4⁰.

American journal of mathematics, edited by J. J. Sylvester. Baltimore 1884. Vol. VI. N⁰. 4. 4⁰.

American chemical journal, edited by Ira Remsen. Baltimore 1884. Vol. VI. N⁰. 2. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1884. Vol. IX. N⁰. 31—43. fol.

El Ensayo Medico. Caracas 1884. Ano I. N°. 16—18. 4°.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1883. N°. 12. 4°.

Guia da exposiçao anthropologica Brazileira realizada pelo Museu Nacional de Rio de Janeiro. 1882. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Airos 1884. Tomo XVII. Entr. 3. 8°.

La République Argentine relativement à l'émigration Européenne. Renseignement statistique-géographique du pays et de ses ressources sous tous leurs aspects par F. Latzina. Buenos-Airos 1883. 8°.

Boletin de la Academia Nacional de ciencias en Cordoba. Bueonos-Airos 1884. Tomo VI. Entr. 1. 8°.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1884. Nieuwe Serie. Jaarg. 17. N°. 3. 8°.

J. J. van Doorninck. Vermomde en naamlooze schrijvers opgespoord op het gebied der Nederlandsche en Vlaamsche letteren. Leiden 1884. Afl. 8—10. 8°.

Bibliotheca Belgica. Livr. 45—48. 12°.

Journal des savants. Paris, Avril 1884. 4°.

Ch. Daremberg et E. Saglio. Dictionnaire des antiquités Grecques et Romaines. Paris 1884. Fasc. 9. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1884. 2e Série. Tome VIII. Mars. 8⁰.

Annales de chimie et de physique. Paris 1884. 6e Série. Tome I. Avril. Tome II. Mai. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1884. 5th Series. Vol. XIII. N⁰. 17. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1884. 5th Series. Vol. XVII. N⁰. 107. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Göttingen 1884. N⁰. 8—9. 8⁰.

Berichte der Deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1884. Band II. Heft 3—4. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1884. Neue Folge. Band XXII. Heft 1. Beiblätter. Band VIII. Stuck 4. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1884. Band CCLII. Heft 3—7. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1884. 3e Période. Tome XXI. N⁰. 63—64. 8⁰.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1884. 3e Période. Tome XI. N⁰. 5. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JUNI 1884.

Bijdragen tot de dierkunde, uitgegeven door het Genootschap »Natura Artis Magistra". Amsterdam 1884. Afl. 10. 4°.

Nederlandsch tijdschrift voor dierkunde, uitgegeven door het Koninklijk Zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra". Amsterdam 1884. Jaarg. 5. Afl. 1. roy. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1884. 4e Reeks. Deel VIII. N°. 5. 8°.

Beschrijvende Catalogus van het Koloniaal Museum te Haarlem. 1884. Deel I. Stuk 3. 8°.

Catalogus der Bibliotheek van de Maatschappij der Nederlandsche letterkunde. Leiden 1884. 2de Gedeelte. Drukwerken. 1ste Afl. roy. 8°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche Entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1884. Deel XXVII. Afl. 2. 8°.

Verslagen omtrent 's Rijks verzamelingen van geschiedenis en kunst. V. 1882. 's Gravenhage 1883. 8°.

Verslag der handelingen van de Tweede Kamer der Staten-Generaal gedurende de zitting van 1826—1827, gehouden te Brussel, van 16 October 1826 tot 8 Mei 1827. Uitgegeven en bewerkt door J. J. F. Noordziek. 's Gravenhage 1883. 1ste Deel. Verslag der handelingen. fol.

Geschiedenis der beraadslagingen gevoerd in de Tweede Kamer der Staten-Generaal over het ontwerp Wetboek van Strafregt. Bewerkt en uitgegeven door J. J. F. Noordziek. 's Gravenhage 1883—1884. Deel I—II. 8⁰.

Sepp's Nederlandsche insecten. 's Gravenhage 1884. 2de Serie. Deel IV. N⁰. 25—26. 4⁰.

Nederlandsch kruidkundig archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche botanische vereeniging. Nijmegen 1884. 2de Serie. Deel IV. Stuk 2. 8⁰.

Werken van het Provinciaal Genootschap van kunsten en wetenschappen in Noord-Brabant. 's Hertogenbosch 1884. Nieuwe Reeks. N⁰. 1. 8⁰.

Inhoud:

C. C. N. Krom. Oorkonden betreffende Helmond.

Statistiek van het Koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand April 1884. 's Gravenhage 1883. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand November 1883. 's Gravenhage 1884. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand November 1883. 's Gravenhage 1884. fol.

BELGIË.

Annales de l'Observatoire royal de Bruxelles. 1884. Nouvelle Série. Annales astronomiques. Tome V. Fasc. 1. 4⁰.

Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1884. 3e Série. Tome VII. N⁰. 4. 8⁰.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1884. 3e Série. Tome XVIII. N⁰. 5. 8⁰.

Coutumes du Pays de Liége. Bruxelles 1884. Tome III. 4⁰.

P. Albrecht. Sur la fossette vermienne du crane des mammifères. Bruxelles 1884. 8⁰.

Natura, maandschrift voor natuurwetenschappen, uitgegeven door het Natuurwetenschappelijk Genootschap. Gent 1884. 2de Jaarg. Afl. 6. 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1884. Tome XCVIII. N⁰. 20—24. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1884. 2e Série. Tome XIII. N⁰. 22—25. 8⁰.

Bulletin de la Société de mathématique de France. Paris 1884. Tome XII. N⁰. 1. 8⁰.

Anatole de Caligny. Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines

THE UNIVERSITY LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ
SCIENCE LIBRARY

This periodical is due on **DATE** stamped below.
To renew by phone, call **459-2050**

SCI. LIB

DIGITIZED AT NRLF

50 Series 1665

NRLF